MAA11 Induktiotodistus (Laudatur 11, 2006)

Kokonaislukuja koskevia väitteitä on usein kätevä todistaa matemaattisen induktioperiaatteen avulla.

Induktiotodistuksessa todistetaan ensin, että väite pitää paikkansa luvulla 1. Sen jälkeen tehdään induktio-oletus, jossa oletetaan, että väite pätee kokonaisluvulle *k*. Sitten osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa, että väite on tosi kokonaisluvulla *k+1*.

Induktiotodistus

1° Alkuaskel: Osoitetaan, että väite pitää paikkansa luvulla $n = 1$.

2° Induktioaskel: Oletetaan, että väite on tosi kokonaisluvulla $n = k$ ja todistetaan, että väite on tosi, kun $n = k + 1$.

Esimerkki 1.

Osoita, että n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa on $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ on $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ratkaisu:

Oletus: $n \epsilon \mathbb{Z}$

Väite: n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa on $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ on $\frac{n(n+1)}{2}$.

Todistus: Todistetaan induktiolla.

1° Alkuaskel

Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = 1$.

$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$, joten väite on tosi, kun $n = 1$.

2° Induktioaskel: k:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa on $\frac{k(k+1)}{2}$.

Osoitetaan, että $k + 1$ ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa on $\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k}_{=\frac{k(k+1)}{2}\text{ oletuksen mukaan}} + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + {}^{2)}(k + 1)$$

$$= \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{2(k + 1)}{2} = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} \qquad | \text{ yhteinen tekijä } k + 1$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Kohdista 1° ja 2° seuraa, että induktiotodistus on valmis, ja voidaan todeta, että n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun summa $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ on $\frac{n(n+1)}{2}$. □