

MAA11 (Lukuteoria ja logiikka)

Välitesti 2 - Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta.

Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

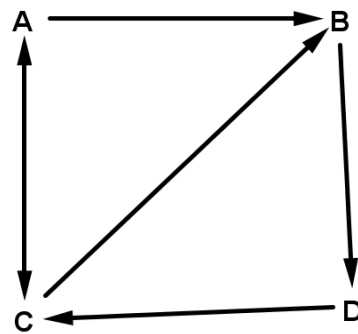
1. Kuviossa kirjaimet A, B, C ja D ovat eräitä henkilöitä. Kuvioon piirretty nuoli ilmaisee, että nuolen alkupisteessä oleva henkilö rakastaa loppupisteessä olevaa henkilöä.

Olkoon $R(x, y)$ avoin lause "x rakastaa y:tä". Tapauksia, missä henkilö rakastaisi itseään, ei huomioida eli $x \neq y$. Ratkaise joukossa $\{A, B, C, D\}$ avoin lause

a) $\neg R(D, y)$.

b) $R(x, C) \wedge \neg R(C, x)$.

c) $\neg (R(x, D) \vee R(D, x))$. (3 p.)



Vastaus:

a) $\{A, B\}$ (1 p.)

b) $\{D\}$ (1 p.)

c) $\{A\}$ (1 p.)

2. Olkoon perusjoukko $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

a) Ratkaise tässä joukossa avoin lause $2x+10 \leq 5x-14$.

b) Ratkaise tässä joukossa avoin lause $(1+2x=7) \wedge (x^2-4x+3=0)$.

c) Ratkaise tässä joukossa avoin lause $(1+2x=7) \vee (x^2-4x+3=0)$. (3 p.)

a)

$$2x+10 \leq 5x-14$$

$$-3x \leq -24 \quad ||: (-3) < 0!!$$

$$x \geq 8$$

Vastaus: $x \in \{8, 9, 10\}$ (1 p.)

b)

$$(1+2x=7) \wedge (x^2-4x+3=0)$$

$$2x=6 \wedge x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x=3 \wedge x=1 \text{ tai } x=3$$

Vastaus: $x=3$. (1 p.)

c) $(1+2x=7) \vee (x^2-4x+3=0)$

Vastaus: $x=1$ tai $x=3$. (1 p.)

3. Olkoon $R(x, y)$ avoin lause "x rakastaa y:tä". Perusjoukko on tietty ihmisryhmä. Suomenna seuraavat lauseet

a) $\forall y R(\text{Ville}, y)$. "Ville rakastaa kaikkia" (1 p.)

b) $\exists x \neg R(x, \text{Ville})$. "On olemassa joku, joka ei rakasta Villeä" (1 p.)

c) $\forall y \exists x R(x, y)$. (3 p.) "Jokaisella on joku, joka rakastaa sitä" (1 p.)

4. Todista lause: Kun lisäät minkä tahansa parittoman luvun neliöön luvun 5 saat vastaukseksi aina parillisen luvun. (3 p.)

Oletus: Olkoon a pariton luku, ts. $a = 2n + 1$. (1 p.)

Väite: $a^2 + 5$ on parillinen.

Todistus:

$$\begin{aligned} a^2 + 5 &= (2n + 1)^2 + 5 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 + 5 \\ &= 4n^2 + 4n + 6 \end{aligned} \quad (1 \text{ p.})$$

$$= 2(2n^2 + 2n + 3). \text{ mikä on parillinen luku!} \quad (1 \text{ p.})$$