Mikä on avoin lause?

- Avoin lause ilmaisee ominaisuuden tai suhteen, joka jonkin joukon alkiolla ehkä on.
- Lause viittaa perusjoukkoon
  - Esim. koululaisryhmä tai reaaliluvut
- Avoimen lauseen ratkaisujoukko muodostuu niistä alkioista, joille lause on tosi

Esimerkki 1

- Olkoon $S(x)$ avoin lause ”x sisältää suklaata” ja perusjoukko on leipomon leivokset.
- Nyt ratkaisujoukko olisivat ne leivokset, jotka sisältävät suklaata. Kuten suklaakakku, sacherkakku jne. Mutta ei esim. porkkanakakku.

Esimerkki 2

Perusjoukko on kokonaislukujen 1-10 joukko $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, ja

$A(x)$ on lause ”luku x on jaollinen kahdella”

B(x) on lause ”luku x on jaollinen viidellä”

Ratkaise avoin lause

a. $A(x) \vee B(x)$

b. $A(x) \wedge B(x)$

Esimerkki 2

Nyt lauseen $A(x)$ toteuttaa joukko $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ja lauseen B(x) toteuttaa joukko $\{5,10\}$.

a. Lauseen $A(x) \vee B(x)$ ratkaisujoukko on $\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

b. Lauseen $A(x) \wedge B(x)$ ratkaisujoukko on $\{10\}$.

Kvanttorit

- ∀ on kaikkikvanttori eli universaalikvanttori
- $\forall x\ A(x)$ luetaan

  ”kaikilla x, $A(x)$”

  ”jokaisella x, $A(x)$”
- Lause $\forall x\ A(x)$ on tosi, jos jokainen perusjoukon alkio toteuttaa avoimen lauseen $A(x)$

Kvanttorit

- $\exists$ on olemassaolokvanttori eli eksistenssikvanttori
- $\exists x\ A(x)$ luetaan

  ”on olemassa x, jolle $A(x)$”

  ”jollakin $x, A(x)$”
- Lause $\exists x\ \mathrm{A}(\mathrm{x})$ on tosi, jos ainakin yksi perusjoukon alkio toteuttaa lauseen $A(x)$

Esimerkki

- Olkoon $S(x)$ avoin lause ”x sisältää suklaata” ja perusjoukko on leipomon leivokset. Suomenna lauset
  a. $\exists x\ S(x)$
  b. $\forall x\ S(x)$
  c. $\exists x\ \left(\neg S(x)\right)$
  d. $\forall x\ \left(\neg S(x)\right)$

a. $\exists x\, S(x)$: ”on olemassa leivos, joka sisältää suklaata”
b. $\forall x\, S(x)$: ”kaikki leivokset sisältävät suklaata”
c. $\exists x\, \big(\neg S(x)\big)$: ”on olemassa (ainakin yksi) leivos, joka ei sisällä suklaata”
d. $\forall x\, \big(\neg S(x)\big)$: ”mikään leivos ei sisällä suklaata”

Kvanttorit

- Lause $\forall x\ A(x)$ on epätosi, jos perusjoukossa on yksikin alkio, jolle lause $A(x)$ on epätosi eli $\neg A(x)$ on tosi
- $\neg\ \forall x\ A(x)$ on siis yhtäpitävä lauseen $\exists x\ (\neg \mathrm{A(x)})$ kanssa

- Lauseen $\forall x\ A(x)$ epätodeksi todistamiseksi riittää vastaesimerkki.

Kvanttorit

- Lause $\exists x\ A(x)$ on epätosi, jos mikään perusjoukon alkio ei toteuta $A(x)$ lausetta eli $\neg A(x)$ on aina tosi.
- $\neg\ \exists\ x\ A(x)$ on siis yhtäpitävä lauseen $\forall x\ (\neg \mathrm{A}(\mathrm{x}))$ kanssa