

# Kokonaislukujen ilmaiseminen kahden luvun avulla

- Diofantoksen yhtälöt ovat muotoa  $ax + by = c$ , missä kaikki luvut ovat kokonaislukuja.
- Esim.  $7x + 3y = 1$ , kun  $x = 1$  ja  $y = -2$ , koska  $7 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 1$ .
  - Toimii myös luvuilla  $x = -2$  ja  $y = 5$  tai  $x = 4$  ja  $y = -9$  jne. Mahdollisia kokonaislukupareja on ääretön määrä.

# Kokonaislukujen ilmaiseminen kahden luvun avulla

- Aina kokonaislukuja ei löydy.
  - Esim.  $21x + 6y = 1$ . Koska 21 ja 6 ovat molemmat kolmella jaollisia, myös luku  $21x + 6y$  on jaollinen kolmella. Koska luku 1 ei ole jaollinen kolmella, ei ole olemassa sellaisia kokonaislukuja  $x$  ja  $y$  jotka toteuttaisivat yhtälön.
- Seuraava lause auttaa, kun mietit, onko ratkaisuja olemassa.

# Kokonaislukujen ilmaiseminen kahden luvun avulla

Lause.

On olemassa sellaiset kokonaisluvut  $x$  ja  $y$ , että  $ax + by = c$ , jos ja vain jos kokonaisluku  $c$  on jaollinen lukujen  $a$  ja  $b$  suurimmalla yhteisellä tekijällä.

# Esimerkki

- Määritä sellaiset kokonaisluvut  $x$  ja  $y$ , että  $41x + 12y = 1$ .
- Ratkaistaan  $\text{syt}(41,12)$  Eukleideen algoritmilla:

$$41 = 3 \cdot 12 + 5$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

Koska  $\text{syt}(41,12) = 1$  ja kaikki kokonaisluvut ovat jaollisia yhdellä, niin on olemassa sellaiset kokonaisluvut  $x$  ja  $y$ , että  $41x + 12y = 1$ .

# Esimerkki

Luvut  $x$  ja  $y$  saadaan kulkemalla Eukleideen algoritmi lopusta alkuun.

Ratkaistaan jakoyhtälöstä jakojäännökset.

$$5 = 41 - 3 \cdot 12$$

$$2 = 12 - 2 \cdot 5$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

Aloitetaan viimeistä yhtälöstä:

$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

Sijoitetaan luvun 2 lauseke.

$$= 5 - 2 \cdot (12 - 2 \cdot 5)$$

$$= 5 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 5$$

$$= -2 \cdot 12 + 5 \cdot 5$$

Sijoitetaan luvun 5 lauseke.

$$= -2 \cdot 12 + 5 \cdot (41 - 3 \cdot 12)$$

$$= -2 \cdot 12 + 5 \cdot 41 - 15 \cdot 12$$

$$= 5 \cdot 41 - 17 \cdot 12$$

Siis  $41x + 12y = 1$ , kun  $x = 5$  ja  $y = -17$ .

Huom! Yhtälö  $41x + 12y = 3$  toteutuu, kun  $x = 3 \cdot 5 = 15$  ja  $y = 3 \cdot (-17) = -51$ .