Induktiotehtävien ratkaisut

1. Oletus. $n \in \mathbb{Z}$

   Väite. n:n ensimmäisen positiivisen parillisen kokonaisluvun summa on
   $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

   Todistus. Todistetaan induktiolla.

   1° Alkuaskel
   Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = 1$.
   $n(n+1) = 1 \cdot (1+1) = 2$, joten väite on tosi, kun $n = 1$.

   2° Induktioaskel

   Oletetaan, että $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$.

   Osoitetaan, että $k+1$:n ensimmäisen positiivisen parillisen kokonaisluvun summa on

   $(k+1)[(k+1)+1] = (k+1)(k+2)$.

   Nyt $\underbrace{2 + 4 + 6 + \cdots + 2k}_{=k(k+1)} + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$
   (otettiin $(k+1)$ yhteiseksi tekijäksi)

   Kohdista 1° ja 2° seuraa, että induktiotodistus on valmis, ja voidaan todeta, että n:n ensimmäisen positiivisen parillisen kokonaisluvun summa $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$. □

2. Oletus. $n \in \mathbb{Z}$

   Väite. n:n ensimmäisen positiivisen parittoman kokonaisluvulle summa on
   $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

   Todistus. Todistetaan induktiolla.

   1° Alkuaskel
   Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n = 1$.
   $1^2 = 1$, joten väite on tosi, kun $n = 1$.

   2° Induktioaskel

   Oletetaan, että $1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$.

   Osoitetaan, että että $k+1$:n ensimmäisen positiivisen parittoman kokonaisluvun summa on $(k+1)^2$.

   Nyt $\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)}_{=k^2} + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1$
   $= (k+1)^2$

   Kohdista 1° ja 2° seuraa, että induktiotodistus on valmis, ja voidaan todeta, että n:n ensimmäisen positiivisen parittoman kokonaisluvun summa $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$. □

3. Oletus. $n \in \mathbb{Z}_+$

Väite. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Todistus. Todistetaan induktiolla.

1° Alkuaskel

Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n=1$.

$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=\frac{6}{6}=1$, joten väite on tosi, kun $n=1$.

2° Induktioaskel

Oletetaan, että $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, kun $k \in \mathbb{Z}_+$.

Osoitetaan, että että $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Nyt

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}_{=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+{}^{6)}(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6}$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)(k+1)}{6}=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)(k+1)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Kohdista 1° ja 2° seuraa, että induktiotodistus on valmis, ja voidaan todeta, että

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. □

4. Oletus. $n \in \mathbb{Z}_+$

Väite. $\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Todistus. Todistetaan induktiolla.

1° Alkuaskel

Osoitetaan, että väite on tosi, kun $n=1$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^1=1-\left(\frac{1}{2}\right)^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, joten väite on tosi, kun $n=1$.

2° Induktioaskel

Oletetaan, että $\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$, kun $k \in \mathbb{Z}_+$.

Osoitetaan, että $\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Nyt $\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$=1+\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right]=1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Kohdista 1° ja 2° seuraa, että induktiotodistus on valmis, ja voidaan todeta, että

$\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. □