Geometrinen todistaminen (Pitkä matematiikka 3, 2010)

Suunnikkaan määritelmä

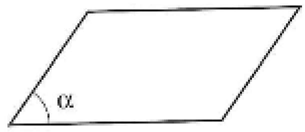
Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

Esimerkki 1

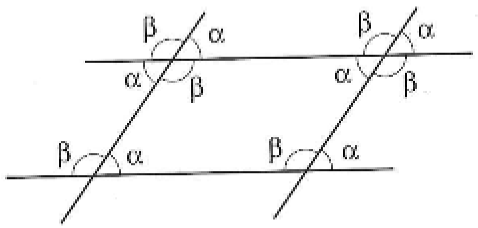
Osoita, että suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180°.

Ratkaisu

Merkitään suunnikkaan yhtä kulmaa α.



Jatketaan suunnikkaan sivuja ja merkitään kulman α vieruskulmaa β. Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, kuvioon muodostuvat samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.



Siis suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Koska vieruskulmien summa on 180°, niin suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180°. □

Todistettiin:

Suunnikkaan kulmat

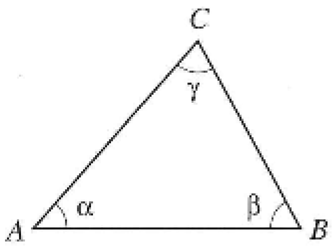
Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180°.

Esimerkki 2

Todista, että kolmion kulmien summa on oikokulma.

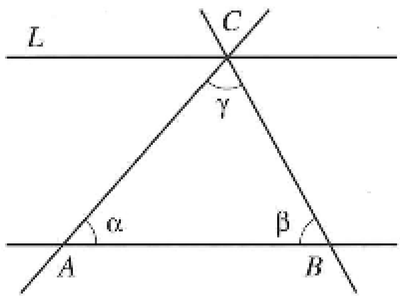
Ratkaisu

Merkitään kolmion kärkiä *A*, *B* ja *C* ja kulmia α, β ja γ.

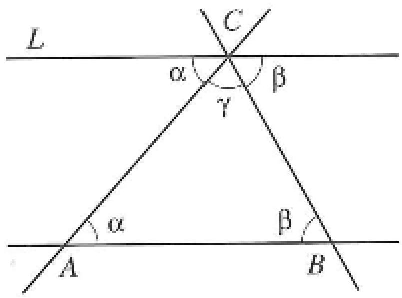


Täydennetään kuvio apupiirroksella:

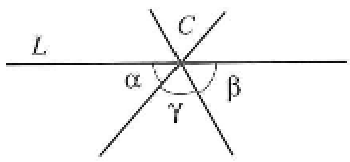
Piirretään kärjen *C* kautta sivun *AB* suuntainen suora *L* ja jatketaan kolmion sivuja.



Koska suora *L* on yhdensuuntainen sivun *AB* määräämän suoran kanssa, niin samankohtaiset kulmat, jotka muodostuvat sivun *AC* määräämän suoran leikatessa niitä, ovat yhtä suuret. Erityisesti kuvioon merkitty kulman α kanssa samankohtainen kulma on yhtä suuri kuin α.



Vastaavasti samankohtaiset kulmat, jotka muodostuvat sivun BC määräämän suoran leikatessa, ovat yhtä suuret. Erityisesti kuvioon merkitty kulman β kanssa samankohtainen kulma on yhtä suuri kuin β.



Siis kulmien α, β ja γ summa on oikokulma eli $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

Todistettiin:

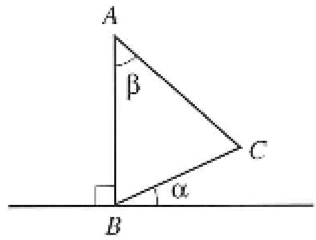
Kolmion kulmien summa

Kolmion kulmien summa on oikokulma, eli kolmion kulmien astelukujen summa on $180°$.

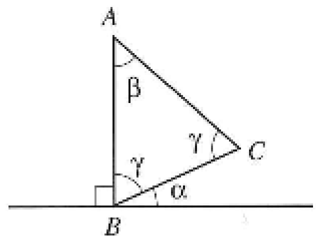
Esimerkki 3

Tasakylkisen kolmion kannan päätepisteen kautta piirretään suora, joka on kohtisuorassa samaan pisteeseen päättyvää kolmion kylkeä vastaan. Osoita, että suoran ja kolmion kannan välinen kulma on puolet kolmion huippukulmasta.

Ratkaisu



Piirretään mallikuva. Kuviossa *AB* ja *AC* ovat tasakylkisen kolmion kyljet eli *AB* = *AC*. Tehtävänä on osoittaa, että $\alpha = \frac{\beta}{2}$ eli $\beta = 2\alpha$.



Ilmaistaan kulma β kulman α avulla käyttämällä hyväksi kuvion ominaisuuksia.

Merkitään $\sphericalangle ABC = \gamma$.

Tasakylkisen kolmion kantakulmina kulmat BCA ja ABC ovat yhtä suuret, joten myös $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Kulmien α ja γ summa on suorakulma, joten $\gamma = 90° - \alpha$.

Koska kolmion kulmien summa on $180°$, niin

$$\begin{aligned} \beta &= 180° - 2\gamma && \text{Sijoitetaan } \gamma = 90° - \alpha \\ &= 180° - 2(90° - \alpha) \\ &= 180° - 180° + 2\alpha = 2\alpha. \end{aligned}$$

Siis $\beta = 2\alpha$. □