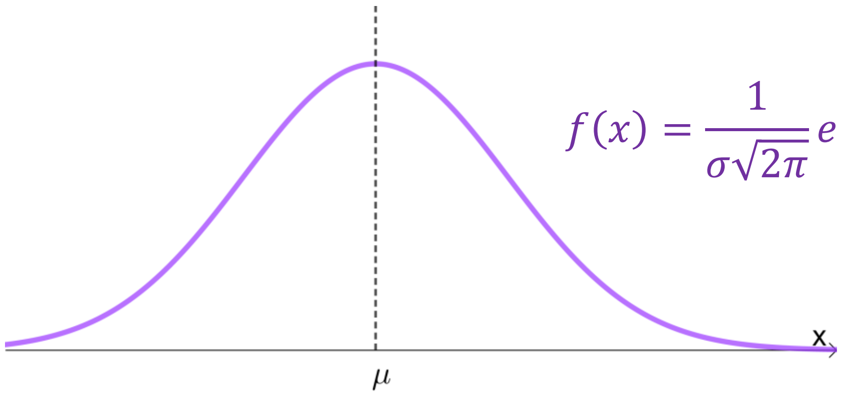
Normaalijakauma

- Monet jatkuvat satunnaismuuttujat X noudattavat ns. *normaalijakaumaa.*
  - Merkitään $X \sim N(\mu, \sigma)$ eli X on jakautunut normaalisti odotusarvolla μ ja keskihajonnalla σ.



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

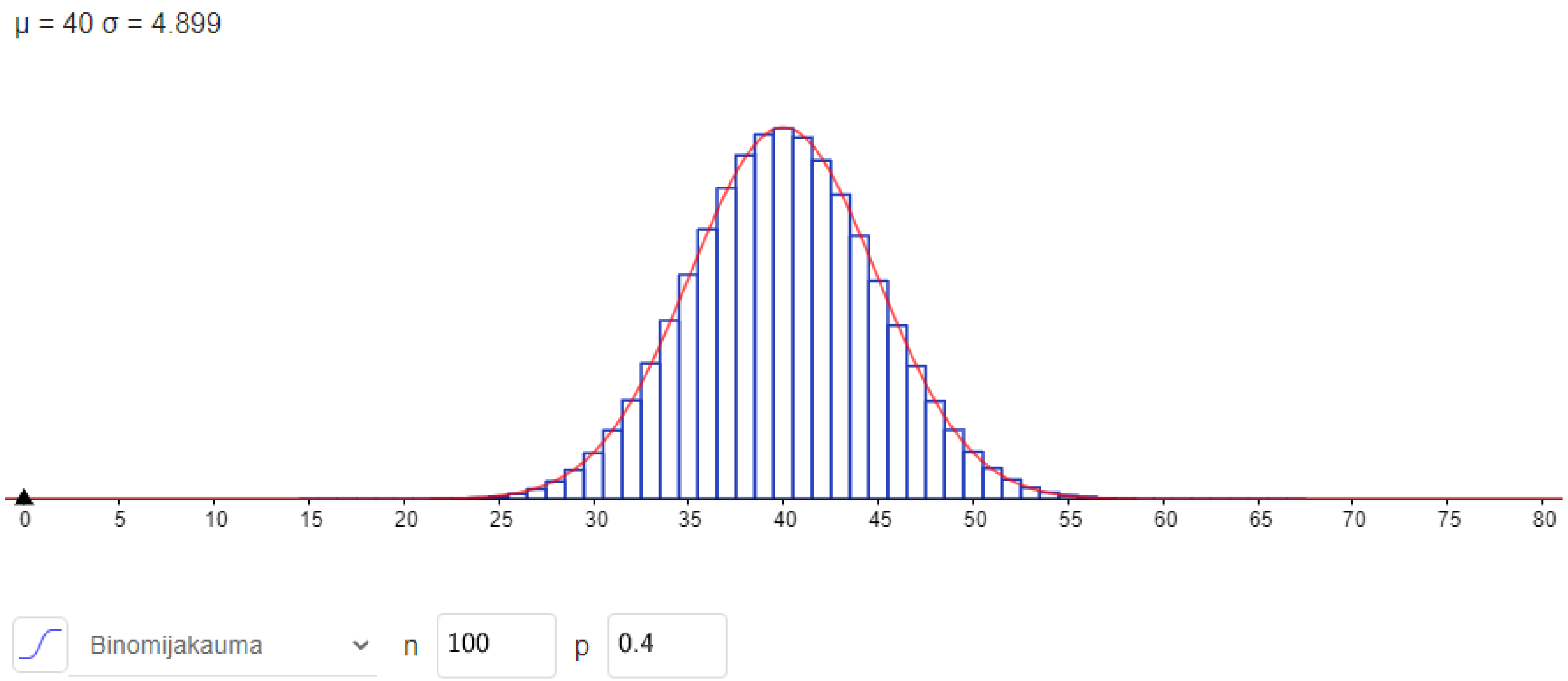
μ = odotusarvo
σ = keskihajonta

Normaalijakauma on symmetrinen odotusarvon molemmin puolin.

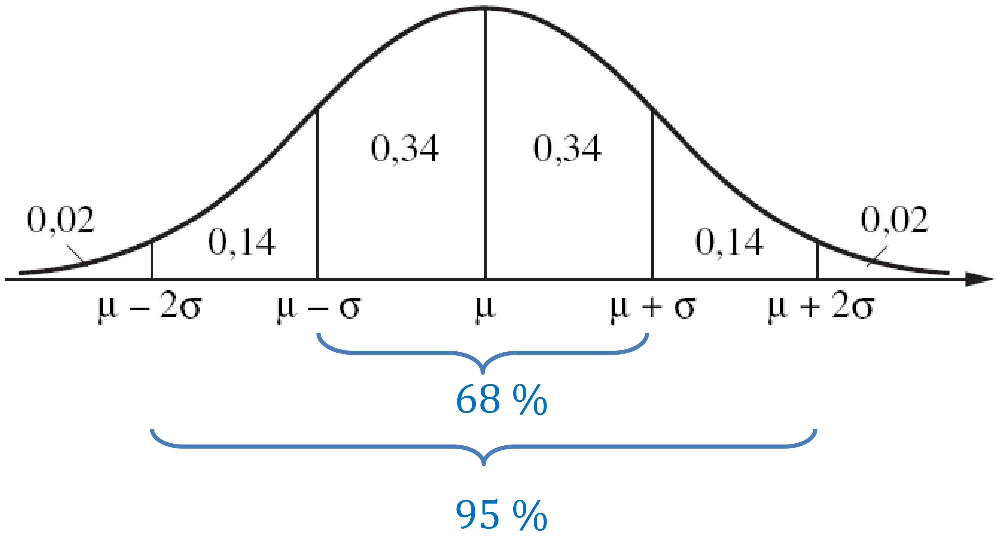
- Esimerkkejä:
  - Jotkin ihmisten (ja eliöiden) ominaisuudet: mm. paino, pituus tietyssä ikäluokassa
  - Mittausvirheet
  - Monien testien tulokset (vaikka satunnaismuuttuja ei olisi varsinaisesti jatkuva)
- Normaalijakauman käyrää (tiheysfunktion f kuvaajaa) kutsutaan *Gaussin käyräksi* tai kellokäyräksi.

- Kun toistojen määrä n on suuri, binomijakautunutta satunnaismuuttujaa $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ voidaan approksimoida normaalijakaumalla (ks. t. 490, s. 178.)
- Tällöin normaalijakauman $N(\mu, \sigma)$ odotusarvo $\mu = np$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
  - ks. oppikirja s. 143.
- **Esimerkki:** Binomijakauma parametreilla $n = 100$ ja $p = 0{,}4$

  (GeoGebran todennäköisyyslaskuri)



- Normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan arvoista 34 % on korkeintaan yhden keskihajonnan verran odotusarvoa suurempi ja vastaavasti (symmetrian perusteella) 34 % on korkeintaan yhden keskihajonnan verran odotusarvoa pienempi.



- Satunnaismuuttuja $X \sim N(\mu, \sigma)$ voidaan normittaa standardinormaalijakaumaksi $Z \sim N(0, 1)$ (jonka kertymäfunktion Φ arvoja löytyy taulukoista) kaavalla

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

- Normitettu arvo kertoo kuinka monta keskihajontaa satunnaismuuttujan arvo poikkeaa odotusarvosta suuntaan tai toiseen.
  - Tämä kertoo kuinka ”poikkeuksellinen” satunnaismuuttujan arvo on (vrt. tilastomuuttujan normitus, oppikirja s. 38)

- **Esimerkki**: $X \sim N(100, 20)$. Normitetaan satunnaismuuttujan arvo $x = 135$ jakaumaan $Z \sim N(0, 1)$.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{135 - 100}{20} = 1{,}75$$

Arvo on siis 1,75 keskihajontaa odotusarvoa suurempi.