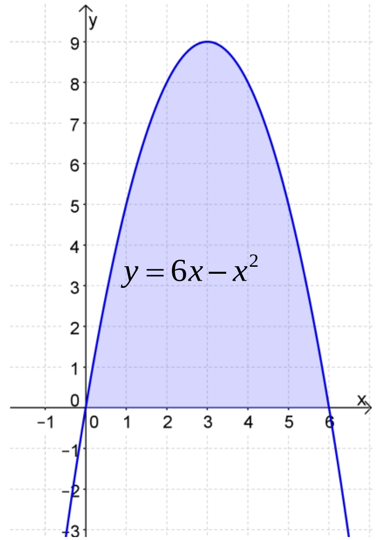
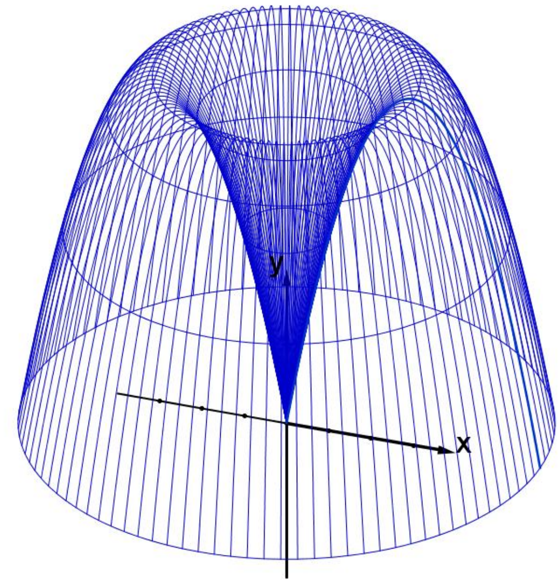
t. 336, s. 135

Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa x = 0 ja x = 6. Paraabelin huippu on pisteessä (3, 9).
Integroidaan y-akselin suuntaisesti, joten ratkaistaan x:





$$y=6x-x^2$$

$$x^2-6x+y=0$$

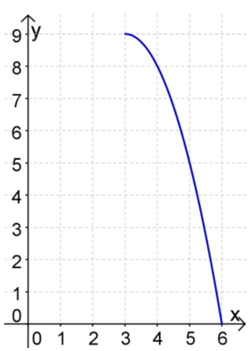
Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla (tai laskimella) saadaan

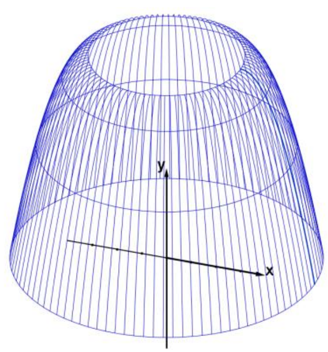
$$x=3\pm\sqrt{9-y},\quad 0\le y\le 9$$

Huom! *y*:n lausekkeena paraabelin muodostaa kaksi eri (juuri)funktiota, jotka pitää siis käsitellä erikseen.

Paraabelin oikea haara ja vastaava pyörähdyskappale:

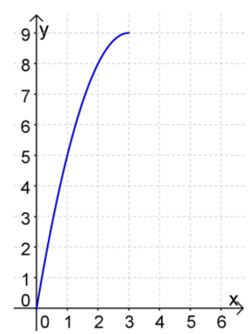
$$x=3+\sqrt{9-y}$$

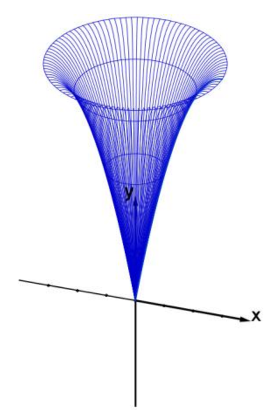




Paraabelin vasen haara ja vastaava pyörähdyskappale:

$$x=3+\sqrt{9-y}$$





Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan vähentämällä oikean haaran muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuudesta vasemman haaran muodostaman pyörähdys-kappaleen tilavuus. Integroimisväli on [0, 9] eli x-akselilta paraabelin huippuun.

$$V=\pi\int_0^9 (3+\sqrt{9-y})^2\,dy-\pi\int_0^9 (3-\sqrt{9-y})^2\,dy$$

Koska rajat on samat, voidaan yhdistää integraalit yhdeksi.

$$=\pi\int_0^9 \left((3+\sqrt{9-y})^2-(3-\sqrt{9-y})^2\right)dy$$

Poistetaan sulut (binomin neliön kaavalla)

$$=\pi\int_0^9 \left((9+6\sqrt{9-y}+9-y)-(9-6\sqrt{9-y}+9-y)\right)dy$$

Sievennetään ja muutetaan funktion potenssiksi.

$$=\pi\int_0^9 12\sqrt{9-y}\,dy=12\pi\int_0^9 (9-y)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

Muokataan sisäfunktion *f*(y) = 9 – *y* derivaatta -1 potenssin eteen. (Onnistuu, koska derivaatta on vakio.)

$$=-12\pi\int_0^9 -(9-y)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

Käytetään funktion potenssin integroimiskaavaa:
(tässä *r* = 1/2, ja muuttujana *y*)

$$\int f'(x)f(x)^r\,\mathrm{d}x=\frac{1}{r+1}f(x)^{r+1}+C, \qquad r\neq -1$$

$$=-12\pi\Big/_0^9\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(9-y)^{\frac{1}{2}+1}=-12\pi\Big/_0^9\frac{2}{3}(9-y)^{\frac{3}{2}}$$

$$V=-8\pi\left(0^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=216\pi\ \ (\approx 679)$$

<u>V: Pyörähdyskappaleen tilavuus on 216π (tilavuusyksikköä)</u>