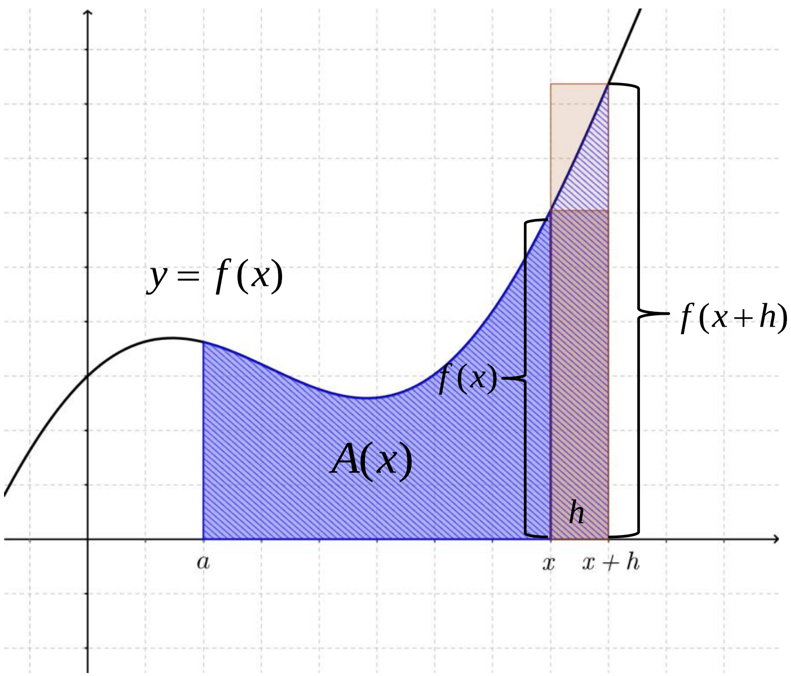
Pinta-alafunktion derivaattalause

Olkoon *f* jatkuva funktio ja *A*(*x*) *pinta-alafunktio*, joka kertoo käyrän ja *x*-akselin rajaaman pinta-alan jostain kiinteästä alarajasta *a* pisteeseen *x.*

Perustellaan, että A'(x) = f(x):

Erityistapaus: f *on aidosti kasvava pisteen* x *ympäristössä.* (*Aidosti vähenevälle funktiolle perustelu voidaan tehdä vastaavalla tavalla.*)



Kuvan oikean reunan kaistaleen pinta-ala on $A(x+h) - A(x)$. Tätä pinta-alaa voidaan myös arvioida kahden suorakaiteen avulla:

$$h \cdot f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq h \cdot f(x+h) \quad \Big| : h$$

$$f(x) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Kun kaistaleen leveys h lähestyy nollaa, niin erotus-osamäärä lähestyy pinta-alafunktion derivaattaa:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \to A'(x)$$

Lisäksi $f(x+h) \to f(x)$, kun $h \to 0$ (koska f *on jatkuva.*)

Erotusosamäärä on näiden toisiaan lähestyvien funktion arvojen välissä, joten

$$A'(x) = f(x)$$

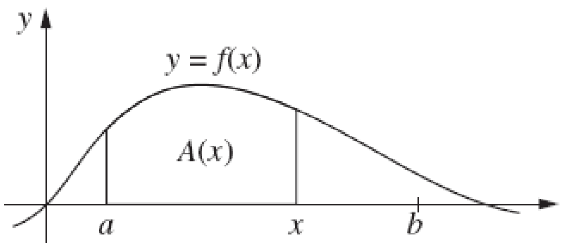
Näin saatiin tärkeä tulos:

Pinta-alafunktion derivaattalause

Välin $[a, b]$ jokaisessa pisteessä on

$$A'(x) = f(x),$$

eli pinta-alafunktio $A(x)$ on välillä $[a, b]$ funktion $f(x)$ integraalifunktio.



Oletus: Funktio f *on välillä* [a, b] *jatkuva ja epänegatiivinen.*

Pinta-alalause

Oletetaan, että funktio f on välillä $[a, b]$ jatkuva ja epänegatiivinen. Tällöin funktion f kuvaajan ja x-akselin välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-ala on

$$A = F(b) - F(a),$$

missä F on funktion f (mikä tahansa) integraalifunktio.

Koska mikä tahansa funktion* f *integraalifunktio* F *käy, niin valitaan integroimisvakioksi* C *= 0. (Joka tapauksessa* C *häviää vähennyslaskussa.)

Todistus:

Derivaattalauseen perusteella $A(x) = F(x) + C$, missä F on funktion f jokin integraalifunktio.

Erityisesti $A(a) = F(a) + C = 0$, josta saadaan $C = -F(a)$.

Siis $A(x) = F(x) - F(a)$ ja $A = A(b) = F(b) - F(a)$.