

Määrätty integraali

Määrätyn integraalin määritelmä

Oletetaan, että funktio f on määritelty ja jatkuva jollakin välillä, joka sisältää luvut a ja b .

Olkoon F funktion f (mikä tahansa) integraalifunktio.

Erotus $F(b) - F(a)$ on funktion f määrätty integraali a :sta b :hen.

Merkitään

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

a = alaraja

b = yläraja

(yleensä siis $b > a$, mutta tämä ei ole välttämätöntä)

Määrätyn integraalin $\int_a^b f(x) dx$ laskeminen

1. Määritetään jokin funktion $f(x)$ integraalifunktio $F(x)$.

(Käytännössä se integraalifunktio, jossa vakio $C = 0$.)

2. Muodostetaan ja lasketaan erotus $F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x) dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

 sijoitusmerkintä

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

Määrätty integraalin yhteenlaskuominaisuus rajojen suhteen

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Rajojen vaihto

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Kaavat on helppo todistaa suoraan määrätyn integraalin määritelmästä, ks. Oppikirja s. 67-68.

Määrätty integraali, jonka alaraja ja yläraja ovat yhtä suuret

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

t. 146, s. 72

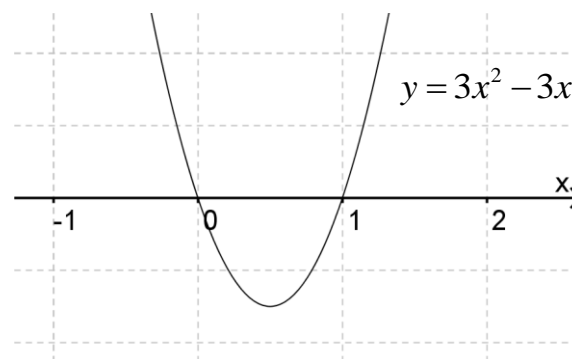
Merkitään $f(x) = |3x^2 - 3x| + x$ ja esitetään funktio ilman itseisarvomerkintää.

Itseisarvolausekkeen nollakohdat:

$$3x^2 - 3x = 3x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Kuvaaja:



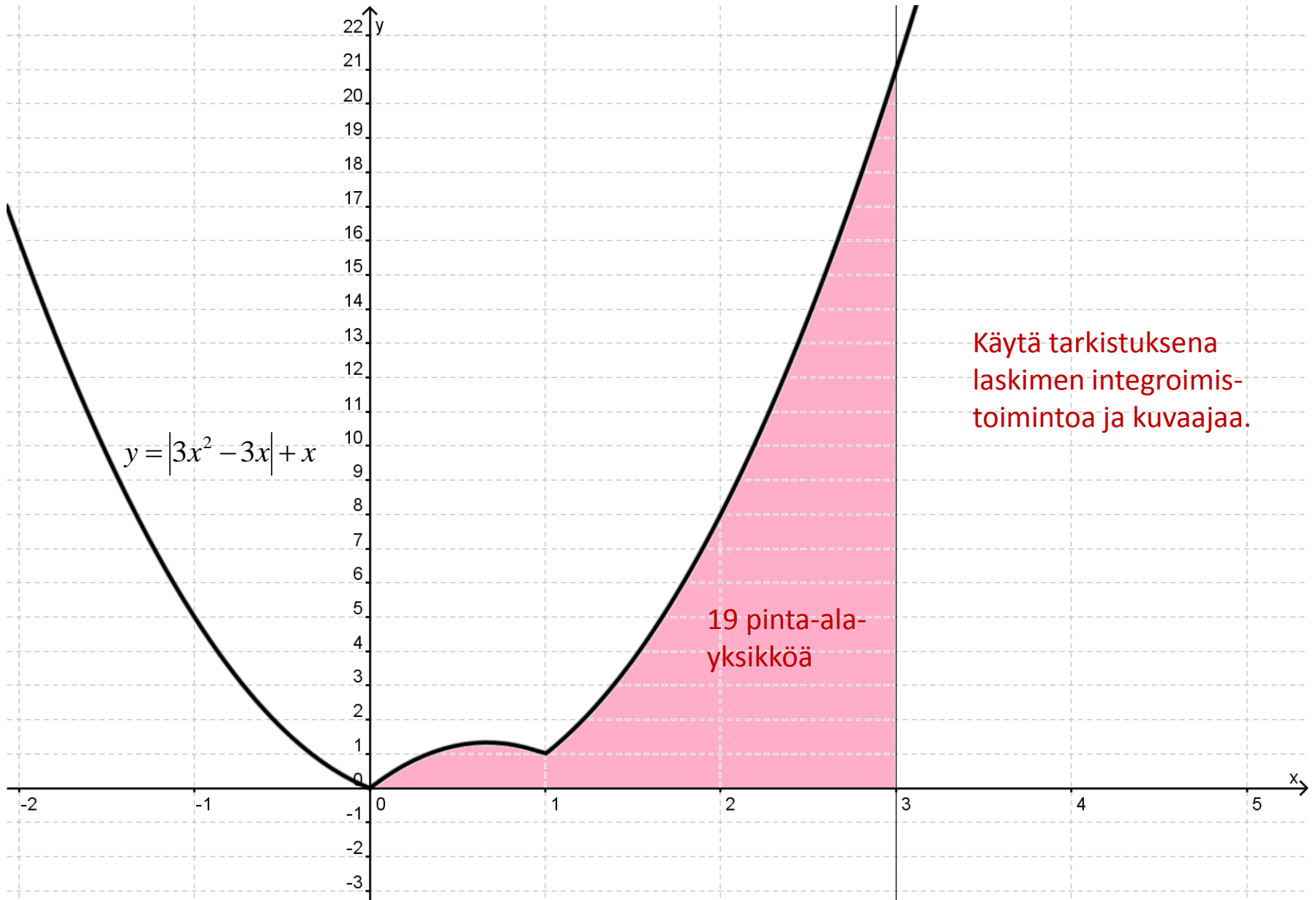
Siis

$$f(x) = |3x^2 - 3x| + x = \begin{cases} -(3x^2 - 3x) + x & \text{kun } 0 < x < 1 \\ (3x^2 - 3x) + x & \text{kun } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -3x^2 + 4x, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 2x, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

Nyt määrätty integraali voidaan laskea osissa:

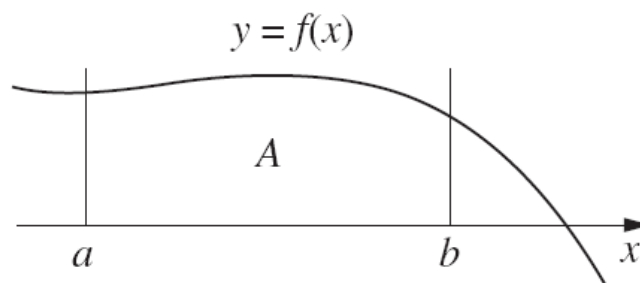
$$\begin{aligned} \int_0^3 (|3x^2 - 3x| + x) dx &= \int_0^1 (-3x^2 + 4x) dx + \int_1^3 (3x^2 - 2x) dx = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2) + \int_1^3 (x^3 - x^2) \\ &= (-1^3 + 2 \cdot 1^2) + (3^3 - 3^2) - (1^3 - 1^2) = -1 + 2 + 27 - 9 = \underline{\underline{19}} \end{aligned}$$

Määrätty integraali voidaan tulkita pinta-alana:



Pinta-alan laskeminen, kun $f(x) \geq 0$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



Pinta-alan laskeminen, kun $f(x) \leq 0$

$$A = -\int_a^b f(x) dx$$

