

Yo-tehtävä

K98/7

(vrt. t. 228, s. 96)

Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän, trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ väliin, kun $x \in [0, \pi]$. Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkö on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 11 500 mk/ha. Kuinka paljon metsän omistaja saa korvausta?

Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet:

$$\sin 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + n2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - x + n2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = n2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = \pi + n2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n\frac{2}{3}\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Välillä $[0, \pi]$ ratkaisuja ovat

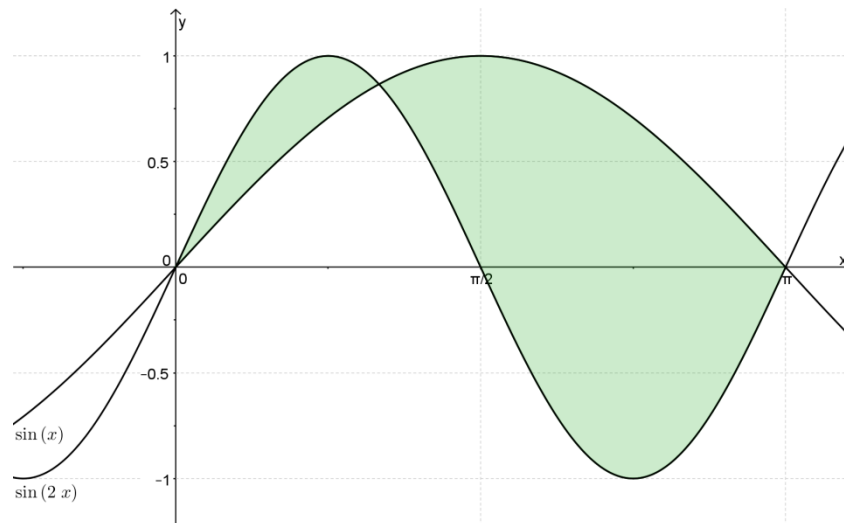
$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{tai} \quad x = \pi$$

Kuvaajan perusteella välillä $]0, \pi/3[$ käyrä $y = \sin 2x$ on ylempänä ja vastaavasti välillä $] \pi/3, \pi[$ alempana.

Pinta-ala saadaan siis integraalina

$$A = \int_0^{\pi} |\sin 2x - \sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$



Pinta-ala on siis $2,5 \text{ km}^2 = 250 \text{ ha}$.
Metsän omistaja saa siis korvausta
 $11\,500 \text{ mk/ha} \cdot 250 \text{ ha} =$
 $2\,875\,000 \text{ mk} \approx$
2,9 miljoonaa markkaa.