# Funktion potenssin integroiminen

- Muotoa $f'(x)f(x)^r$ oleva lauseke voidaan integroida kaavalla

$$\int f'(x)f(x)^r \,\mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C, \qquad r \neq -1$$

- Tarkistus derivoimalla (yhdistetyn funktion derivaatta):

$$D\left(\frac{1}{r+1}f(x)^{r+1} + C\right) = \frac{1}{r+1}Df(x)^{r+1}$$

- Jos potenssi *r* = -1, niin integraali on muotoa

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

$f'(x)f(x)^{-1}$

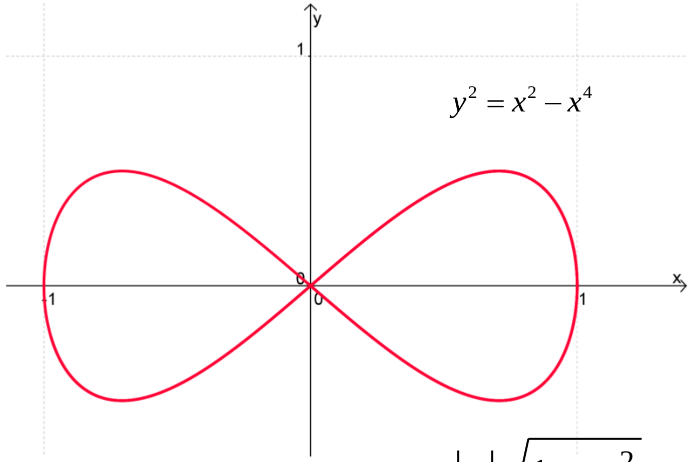
(Myös tämän kaavan voi helposti tarkistaa derivoimalla integraalifunktion yhdistetyn funktion derivoimiskaavalla.)

# t. 320, s. 133

$$y^2 = x^2 - x^4 \Leftrightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4} = \pm\sqrt{x^2\left(1 - x^2\right)} = \pm|x|\sqrt{1 - x^2}$$

Käyrä on olemassa kun $1 - x^2 > 0$ eli välillä [-1, 1]




Käyrä on symmetrinen koordinaatistoakselien suhteen, joten sen rajaama pinta-ala $A$ saadaan laskemalla ensimmäisen neljänneksen (oikea yläkulma) pinta-ala ja kertomalla se neljällä.

Käyrän yläpuoli on $y = |x|\sqrt{1 - x^2}$ ja alapuoli $y = -|x|\sqrt{1 - x^2}$.

Ensimmäisessä neljänneksessä $y = x\sqrt{1 - x^2}$ .

$$A = 4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} \; = 4\int_0^1 x\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Muokataan potenssilausekkeen eteen sisäfunktion $f(x) = 1 - x^2$ derivaatta $f'(x) = -2x$.

$$A = -2\int_0^1 -2x\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(-2 · (-2) = 4)

Käytetään funktion potenssin integroimiskaavaa:

$$A = -2 \Big/_0^1 \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}+1} = -2 \Big/_0^1 \frac{2}{3}\left(1 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} = -2 \cdot \frac{2}{3}(0 - 1) = \frac{4}{3}$$

V: Käyrän rajaama pinta-ala on 4/3.