

Yleisen potenssifunktion integrointi

- Yleiset potenssifunktiot x^r , missä $r \in \mathbb{R}$ voidaan integroida vastaavaan tapaan kuin potenssifunktiot x^n , missä $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Ainoa poikkeus on potenssifunktio x^{-1} .
- Kun eksponentti $r \neq -1$:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

Eksponentti yhtä suuremmaksi ja uuden eksponentin käänteisluku kertoimeksi.

- Kun eksponentti $r = -1$:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$D \ln|x| = \frac{1}{x}$$

- Kaavat todistetaan derivoimalla (oppikirja s. 27)

t. 154, s. 31

Kerrotaan sulut auki ja muutetaan lausekkeet potenssimuotoon:

$$\mathbf{a)} \quad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \int (1 + 2x^{-1} + x^{-2}) dx$$

$$= x + 2 \ln x + \frac{1}{-2 + 1} x^{-2+1} + C$$

$$= x + 2 \ln x - x^{-1} + C$$

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$= x + 2 \ln x - \frac{1}{x} + C$$

$$\text{b)} \quad \int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= \int (x^2 - 2 + x^{-2}) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 2x - x^{-1} + C = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x} + C$$

$$\text{c)} \quad \int (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \int (x + 2\sqrt{x} + 1) dx$$

$$= \int (x + 2x^{\frac{1}{2}} + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2}+1} + x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + C$$

$$x^{\frac{3}{2}} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$$

Lyhyemmin:

$$2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x + C$$

t. 157, s. 31

Muodostetaan ensin funktion $f(x) = \sqrt{x} - 4, x > 0$, kaikki integraalifunktiot F .

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (\sqrt{x} - 4) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - 4) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 4x + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 4x + C \end{aligned}$$

Se integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(9, 18)$ kautta, toteuttaa ehdon $F(9) = 18$.

$$F(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{9} - 4 \cdot 9 + C = 18$$

$$6 \cdot 3 - 36 + C = 18$$

$$C = 36$$

Kysytty integraalifunktio on siis $F(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 4x + 36$, missä $x > 0$.

Integraalifunktion F kulkua voidaan tutkia sen derivaatan eli alkuperäisen funktion f avulla.

Derivaattafunktion $f(x) = \sqrt{x} - 4$ arvot ovat positiivisia, kun

$$\sqrt{x} - 4 > 0 \iff \sqrt{x} > 4 \iff x > 16.$$

(Derivaattaa voi tutkia myös kulkukaaviolla ja testipisteillä.)

Derivaatta on siis positiivinen, kun $x > 16$, joten kaikki integraalifunktiot ovat kasvavia välillä $]16, \infty[$.

