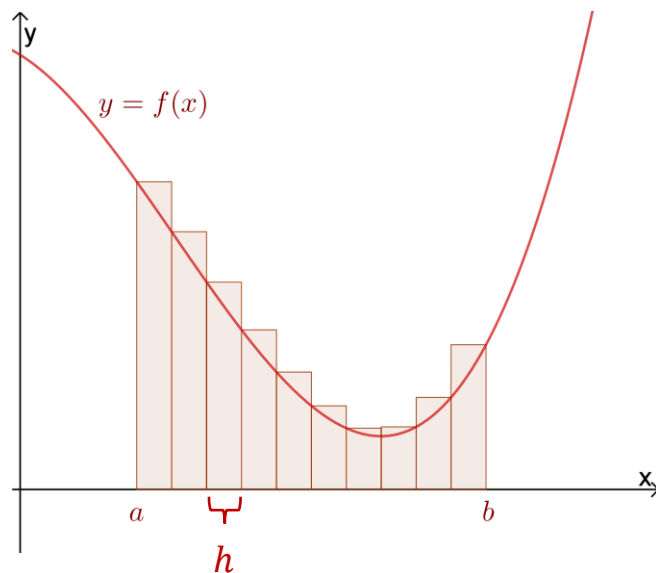


Ylä- ja alasumma

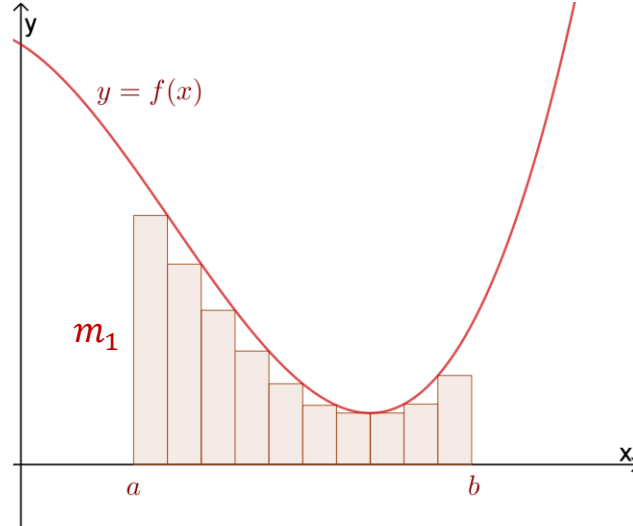
- Käyrän ja x -akselin rajaamaa pinta-alaa voidaan arvioida suorakulmioiden avulla.
- Jaetaan tarkasteltava väli $[a, b]$ osaväleihin. Jos osavälejä on n kappaletta, niin kunkin osavälin leveys on $h = \frac{b-a}{n}$.
- Jokaiselle osavälille muodostetaan suorakulmio, jonka leveys on h .
- *Yläsumma* saadaan valitsemalla suorakulmion korkeudeksi funktion suurin arvo kyseisellä osavälillä ja laskemalla suorakulmioiden kokonaispinta-ala.

Yläsumma välillä $[a, b]$.
Osavälien määrä $n = 10$.



- *Alasumma* saadaan vastaavasti valitsemalla osaväleillä aina funktion pienin arvo.

Alasumma välillä $[a, b]$.
Osavälien määrä $n = 10$.



- Merkitään yläsumman suorakulmioiden korkeuksia $M_1, M_2, \dots, M_n$ ja alasumman suorakulmioiden korkeuksia $m_1, m_2, \dots, m_n$.
- Yläsumma on

$$h \cdot M_1 + h \cdot M_2 + \dots + h \cdot M_n = \sum_{k=1}^n h M_k$$

ja alasumma

$$h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + \dots + h \cdot m_n = \sum_{k=1}^n h m_k.$$

- Jos jatkuvan funktion f arvot ovat välillä $[a, b]$ epänegatiivisia, niin kuvaajan ja x –akselin rajaama pinta-ala on $A = \int_a^b f(x)dx$.
- Tämä pinta-ala on ylä- ja alasumman välissä:

$$\sum_{k=1}^n hm_k \leq A \leq \sum_{k=1}^n hM_k$$

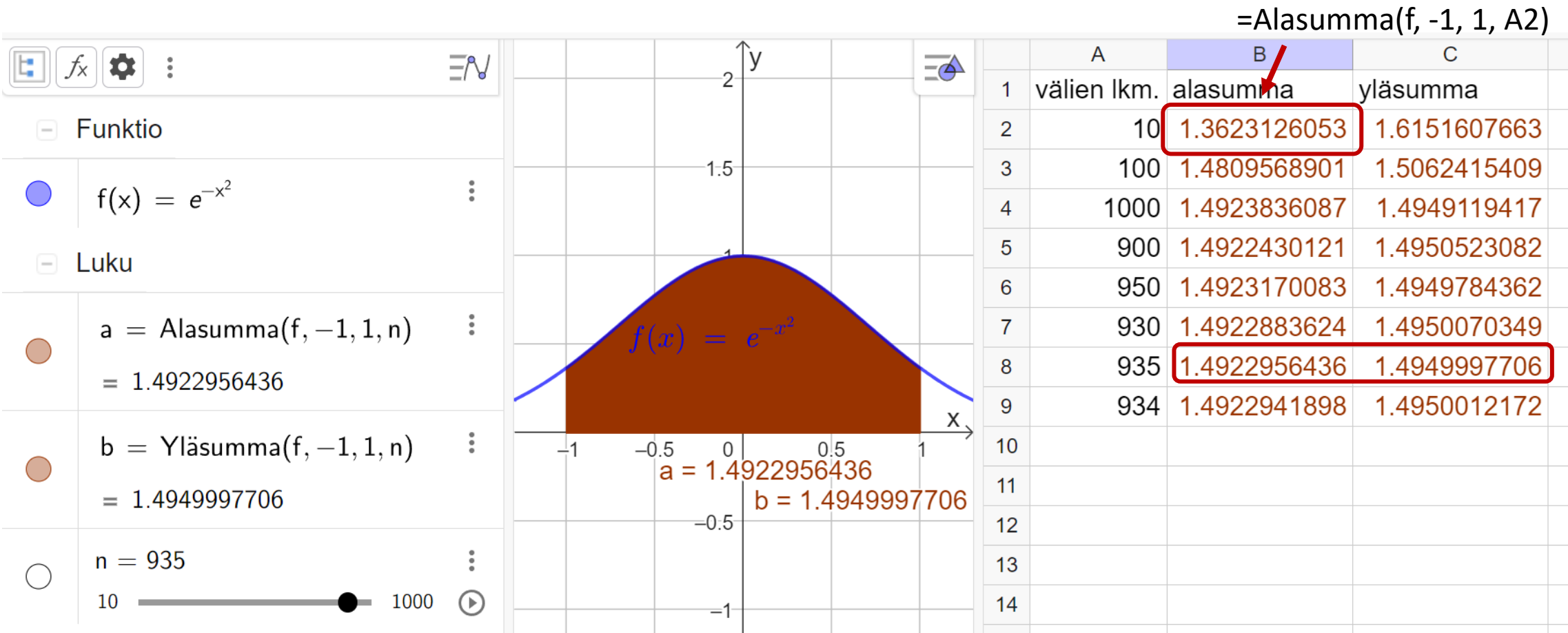
- Kun osavälin leveys h lähestyy nollaa (samalla $n \rightarrow \infty$), niin ylä- ja alasummat lähestyvät pinta-alaa A .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n hM_k = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n hm_k = A$$

- Geogebraalla ylä- ja alasummat voidaan helposti määrittää (ja piirtää) komennoilla ”Yläsumma” ja ”Alasumma”.

t. 460, s. 110

Ylä- ja alasummaa kannattaa tutkia GeoGebralla joko liikusäädintä (n) tai taulukkolaskentaa apuna käyttäen. Pienin välien lukumäärä, jolla summa pyöristyvät kahden desimaalin tarkkuudella samaan arvoon, on 935. Pinta-alan likiarvo on $A \approx 1,49$.



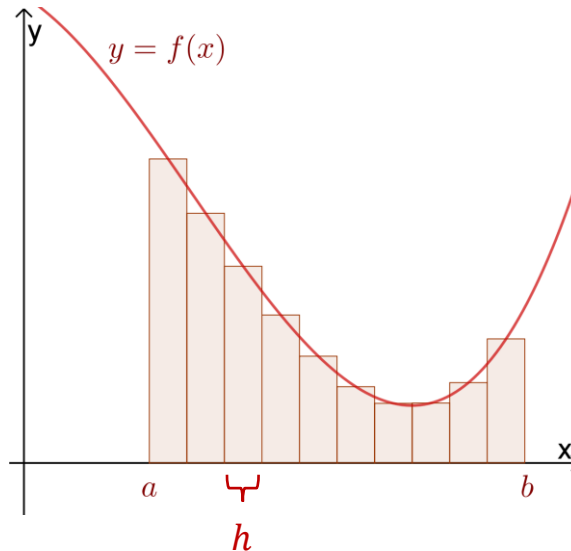
Keskipistesääntö

- *Keskipistesääntöä* käytettäessä suorakulmioiden korkeuksiksi valitaan funktion arvot osavälien (n kpl) keskipisteissä.
- Epänegatiivisen sekä jatkuvan funktion f kuvaaja ja x –akseli rajaa välillä $[a, b]$ pinta-alan A . Keskipistesäännöllä saadaan tälle pinta-alalle likiarvo

$$A \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)),$$

missä $x_1, x_2, \dots, x_n$ ovat osavälien keskipisteitä.

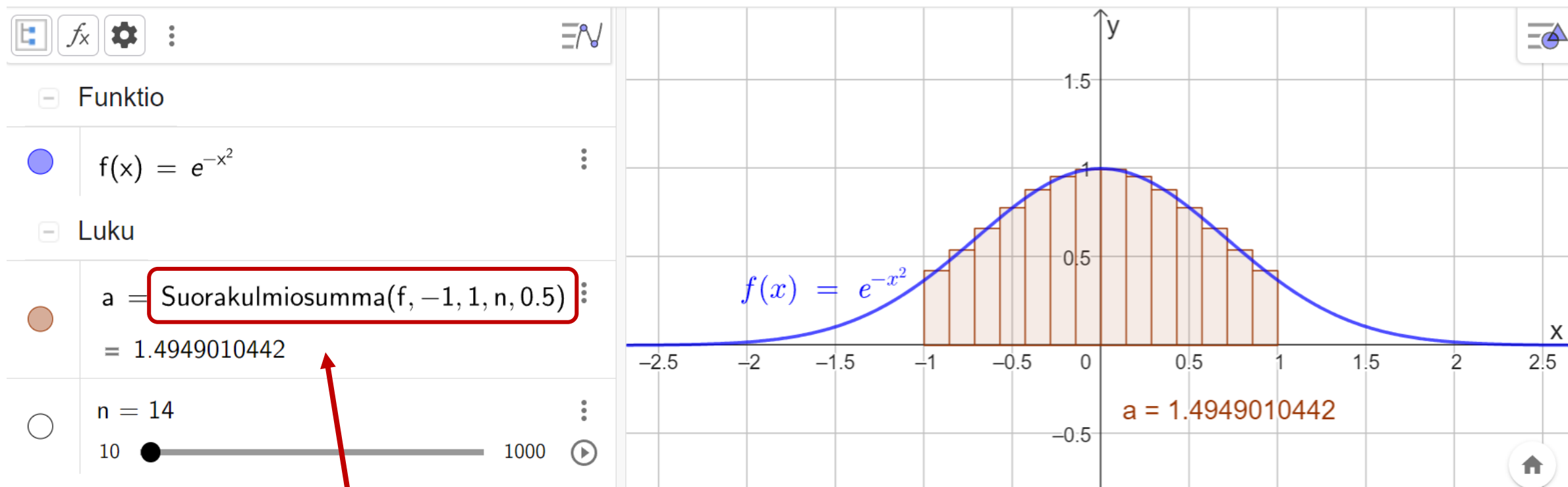
Keskipistesäännön mukaiset suorakulmiot välillä $[a, b]$.
Osavälien määrä $n = 10$.



Geogebraassa käytä komentoa
"Suorakulmiosumma" ja laita
parametrin "suorakulmion paikka"
arvoksi 0.5.

Esimerkki:

Tehtävän 460 pinta-alan likiarvo $A \approx 1,49$ saadaan keskipistesäännöllä jo 14 osavälillä. (Tämä ei kuitenkaan varmuudella osoita likiarvon olevan oikea, kuten ala- ja yläsummia käytettäessä.)



Suorakulmiosumman parametrit: funktion nimi, alaraja, yläraja, suorakulmioiden lukumäärä, suorakulmion paikka (keskipistesäännöllä 0.5)