

Yhdistetyn funktion derivoiminen

- Yhdistetty funktio koostuu *sisäfunktio*sta $f(x)$ ja *ulkofunktio*sta $g(x)$.
- Sisäfunktio on ulkofunktiossa muuttujakirjaimen x paikalla (eli funktion argumenttina).
- Yhdistetty funktio voidaan kirjoittaa muodossa $g(f(x))$.
- Yhdistetyn funktion derivoimiskaava (MAA6):

$$Dg(f(x)) = f'(x)g'(f(x))$$

Derivoidaan ensin ulkofunktio, ja sijoitetaan siihen alkuperäinen sisäfunktio.
Muista, että sisäfunktio säilyy muuttumattomana!

Tämän lisäksi lausekkeeseen ”ilmestyy” sisäfunktion derivaatta $f'(x)$.

Huom! Oppikirjassa kaava on muodossa $Du(s(x)) = s'(x) \cdot u'(s(x))$

Yhdistetyn funktion integroiminen

- Edelliselle käänteisesti, jos integroitava funktio on muotoa $f'(x)g'(f(x))$ eli sisäfunktion derivaatan lauseke on yhdistetyn funktion kertoimena, niin saadaan integroimiskaava

$$\int f'(x)g'(f(x))dx = g(f(x)) + C$$

Integroitaessa sisäfunktion derivaatta häviää pois.

Lauseke pitää siis saada muokattua sellaiseen muotoon (jos vain mahdollista), että siinä on sisäfunktion derivaatta yhdistetyn funktion edessä tekijänä. Sopiva vakiokerroin (ei muuttujakirjainta!) voidaan laittaa integraalin sisään, jos tämä kompensoidaan kertoimen käänteisluvulla integraalin edessä.

Funktion potenssin integroiminen

- Erikoistapauksena yhdistetyn funktion integroimiskaavasta saadaan seuraavat funktion potenssin $(f(x))^n$ (tai $f(x)^n$) integroimiskaavat:

$$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int f'(x)(f(x))^{-1} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0$$

Kaavat voi todistaa derivoimalla.

(Apuna funktion potenssin derivaatta: $Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$,

logaritmin derivaatta $D \ln|x| = \frac{1}{x}$ ja yhdistetyn funktion derivoimissääntö.)

a) $\int 6x^2(x^3 + 3)^6 dx$

Käytetään kaavaa $\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$.

Sisäfunktio on $f(x) = x^3 + 3$ ja sen derivaatta $f'(x) = 3x^2$.

Derivaatan lauseke on kerrointa vaille oikein, joten se voidaan muokata kertoimeksi.

$$\int 6x^2(x^3 + 3)^6 dx = 2 \int \underset{f'(x)}{3x^2} \underset{f(x)}{(x^3 + 3)}^6 dx$$

Sisäfunktion derivaatta $3x^2$ häviää integroitaessa, mutta integraalin eteen muokattu kerroin 2 säilyy.

$$= 2 \cdot \frac{1}{7} (x^3 + 3)^7 + C = \frac{2}{7} (x^3 + 3)^7 + C$$

Huomaa, että sisäfunktion muoto säilyy vastauksessa! Muista tarkistaa derivoimalla!

b) $\int \left(\frac{x}{3} + 1\right)^5 dx$

Käytetään kaavaa $\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$.

Sisäfunktio on $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ ja sen derivaatta $f'(x) = \frac{1}{3}$.

Vakio voidaan aina muokata kertoimeksi.

$$\int \left(\frac{x}{3} + 1\right)^5 dx = 3 \int \underbrace{\frac{1}{3}}_{f'(x)} \underbrace{\left(\frac{x}{3} + 1\right)}_{f(x)}^5 dx$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{x}{3} + 1\right)^6 + C = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} + 1\right)^6 + C$$

Sisäfunktion derivaatta $\frac{1}{3}$ häviää integroitaessa,
mutta integraalin eteen muokattu kerroin 3 säilyy.

Muista aina tarkistaa derivoimalla!