

t. 406, s. 89

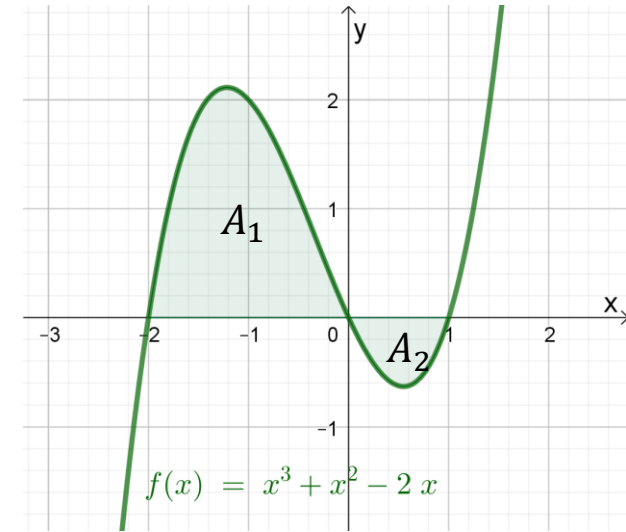
Ratkaistaan funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ nollakohdat:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$



Kuvaajan muodon voi hahmotella (suttupaperille) A-osassa koetta nollakohtien ja kolmannen asteen termin etumerkin avulla tai käyttämällä testipisteitä.

Nollakohtien $x = -2$ ja $x = 0$ välillä $f(x) > 0$ joten tälle välille rajautuva pinta-ala saadaan määrättynä integraalina

$$A_1 = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx.$$

Vastaavasti nollakohtien $x = 0$ ja $x = 1$ välillä $f(x) < 0$ jolloin välin pinta-ala on

$$A_2 = - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \int_1^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx.$$

Kaksiosaisen alueen pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_1^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \\ &= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right) + \int_1^0 \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right) \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} (-2)^4 + \frac{1}{3} (-2)^3 - (-2)^2 \right) + 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 8 - 4 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = -4 + \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{7}{3} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{37}{12} = 3 \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Tarkistus SpeedCrunchilla:

$$F(x) = 1/4 * x^4 + 1/3 * x^3 - x^2$$

$$\begin{aligned} &F(0) - F(-2) + F(0) - F(1) \\ &= 3,083\ 333\ 333\ 333\ 333\ 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3 + 1/12 \\ &= 3,083\ 333\ 333\ 333\ 333\ 33 \end{aligned}$$