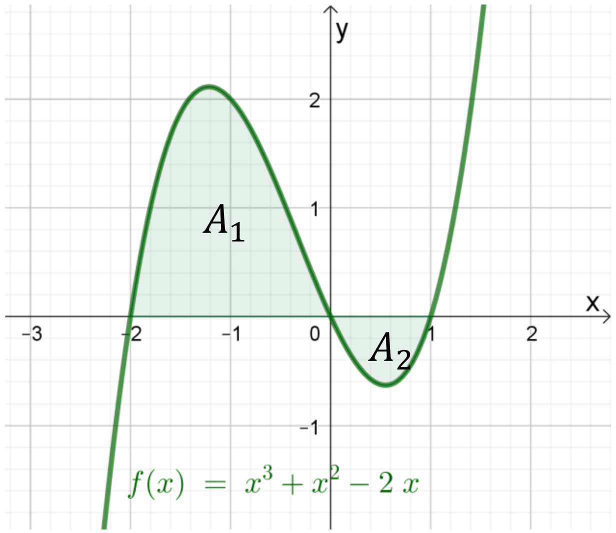
t. 406, s. 89

Ratkaistaan funktion $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ nollakohdat:



$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Kuvaajan muodon voi hahmotella (suttupaperille) A-osassa koetta nollakohtien ja kolmannen asteen termin etumerkin avulla tai käyttämällä testipisteitä.

Nollakohtien $x = -2$ ja $x = 0$ välillä $f(x) > 0$ joten tälle välille rajautuva pinta-ala saadaan määrättynä integraalina

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx.$$

Vastaavasti nollakohtien $x = 0$ ja $x = 1$ välillä $f(x) < 0$ jolloin välin pinta-ala on

$$A_2 = -\int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)dx = \int_{1}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx.$$

Kaksiosaisen alueen pinta-ala on

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_{1}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx$$

$$= \Big/_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right) + \Big/_{1}^{0} \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2\right) + 0 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 8 - 4\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) = -4 + \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{37}{12} = 3\,\frac{1}{12}$$