t. 224, s. 43

$$g(x) = -\frac{2x}{x^2+1} \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C}$$

$$G(x) = \int -\frac{2x}{x^2+1}dx = -\int \frac{2x}{\underbrace{x^2+1}_{>0}}dx = -\ln|x^2+1| + C = -\ln(x^2+1) + C \quad , x \in \mathbb{R}$$

Integraalifunktion kuvaajalla $y = G(x)$ on tangenttina suora $x + y + \ln 2 = 0$.

Tangentin yhtälö y:n suhteen ratkaistussa muodossa on $y = -x - \ln 2$, joten tangentin kulmakerroin on $k = -1$.

Toisaalta tangentin kulmakerroin on funktion $G(x)$ derivaatan $G'(x) = g(x)$ arvo sivuamispisteessä.

Ratkaistaan sivuamispisteen x-koordinaatti yhtälöstä $g(x) = -1$.

$$g(x) = -\frac{2x}{x^2+1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2+1} = 1 \;\Big|\cdot\; x^2+1 \;\; (\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

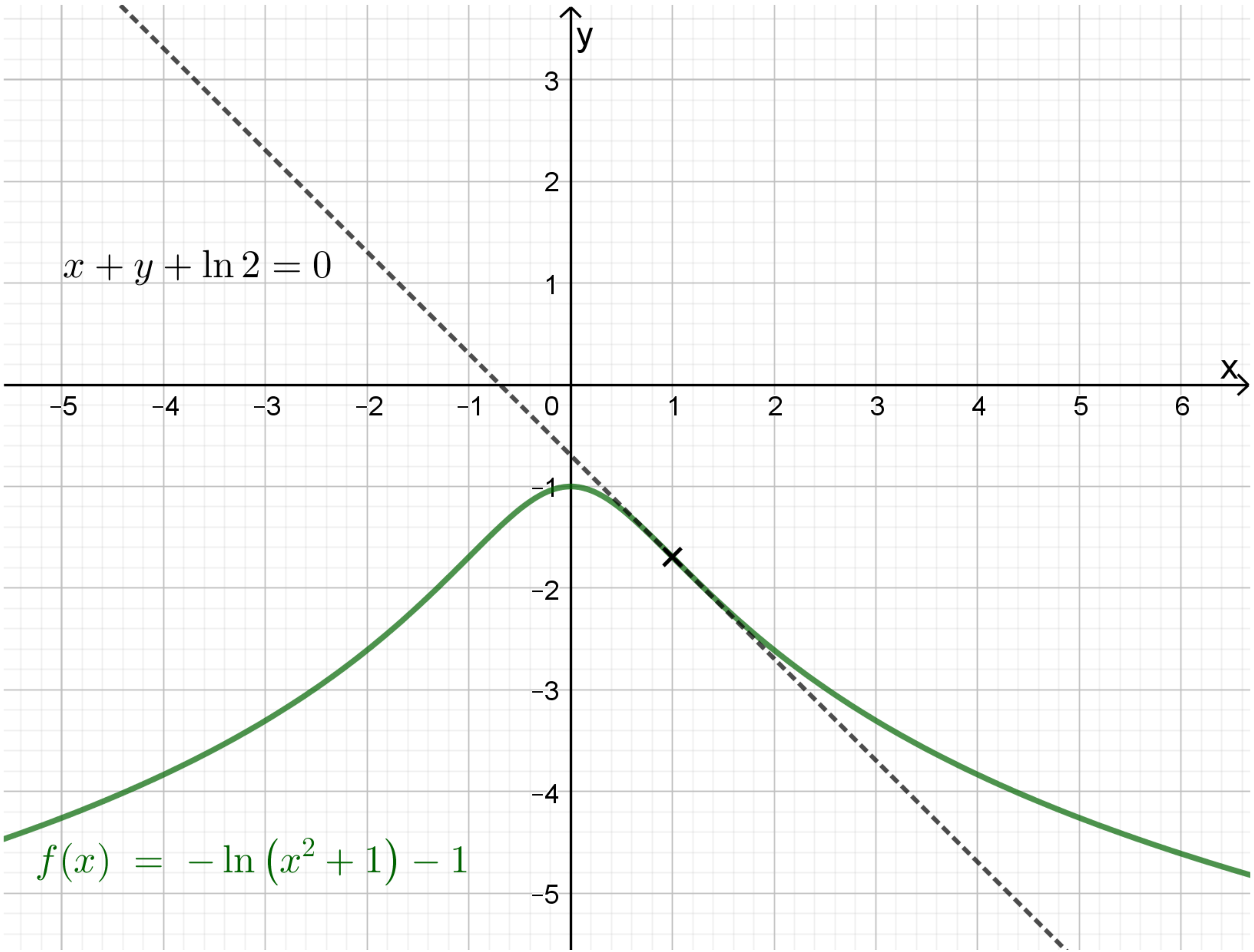
Sivuamispisteen y-koordinaatti on $y = -1 - \ln 2$

Sivuamispiste on myös käyrällä $y = G(x)$, joten on oltava $G(1) = -1 - \ln 2$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä C:

$$\begin{aligned} G(1) = -\ln(1^2 + 1) + C &= -1 - \ln 2 \\ -\ln 2 + C &= -1 - \ln 2 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

V: Kysytty integraalifunktio on $G(x) = -\ln(x^2 + 1) - 1$


y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
$x + y + \ln 2 = 0$
$f(x) = -\ln\left(x^2 + 1\right) - 1$