

Tarkastellaan paraabeleja, jotka kulkevat pisteiden  $(-1, 0)$  ja  $(1, 0)$  kautta ja ovat  $y$ -akselin suhteen symmetrisiä.

1. Kirjoita tällaisen paraabelin yleinen yhtälö. (2 p.)
2. Millä ehdolla kaksi tällaista paraabelia leikkaa toisensa kohtisuorassa? (5 p.)
3. Tarkastellaan pinta-alaa, joka jää kahden tällaisen toisensa kohtisuoraan leikkaavan paraabelin väliin. Mikä on tämän pinta-alan pienin mahdollinen arvo? (5 p.)

1. Paraabelin yleinen yhtälö on  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ , missä  $a \neq 0$ .

Ratkaistaan parametrit  $b$  ja  $c$  ( $a$ :n avulla) esitettyinä tunnettujen pisteiden  $(-1, 0)$  ja  $(1, 0)$  avulla muodostetusta yhtälöparista:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

*Valmis*

$$\text{solve}\left(\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-1)=0 \end{cases}, \{b, c\}\right)$$

$b=0$  and  $c=-a$

Paraabelit ovat siis muotoa

$$y = f(x) = ax^2 - a = a(x^2 - 1), \quad a \neq 0.$$

Koska paraabeli on  $y$  –akselin suhteen symmetrinen (eli  $f$  on parillinen funktio), täytyy olla  $b = 0$ .

Paraabelin yhtälön voi päätellä myös tekijöiden avulla. Koska yhtälön  $f(x) = 0$  nollakohdat ovat  $x = 1$  tai  $x = -1$ , täytyy polynomilla  $f$  olla tekijät  $x - 1$  ja  $x + 1$ .

Siis  $y = f(x) = a(x - 1)(x + 1) = a(x^2 - 1)$ , missä  $a \neq 0$ .

2. Tarkastellaan kahta paraabelia  $y = f(x) = a(x^2 - 1)$  ja  $y = g(x) = b(x^2 - 1)$ , missä  $a \neq 0, b \neq 0$  ja  $a \neq b$ .

Paraabelit leikkaavat toisensa, kun  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a(x^2 - 1) = b(x^2 - 1)$ .

Koska  $a \neq b$ , yhtälö on tosi jos ja vain jos  $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

Symmetrian vuoksi riittää tarkastella pelkästään kohtaan  $x = 1$  eli leikkauspisteeseen  $(1, 0)$  piirrettyjen tangenttien kulmakertoimia. Paraabelit leikkaavat kohtisuorassa, jos näiden tangenttien kulmakertoimien tulo on  $-1$ .

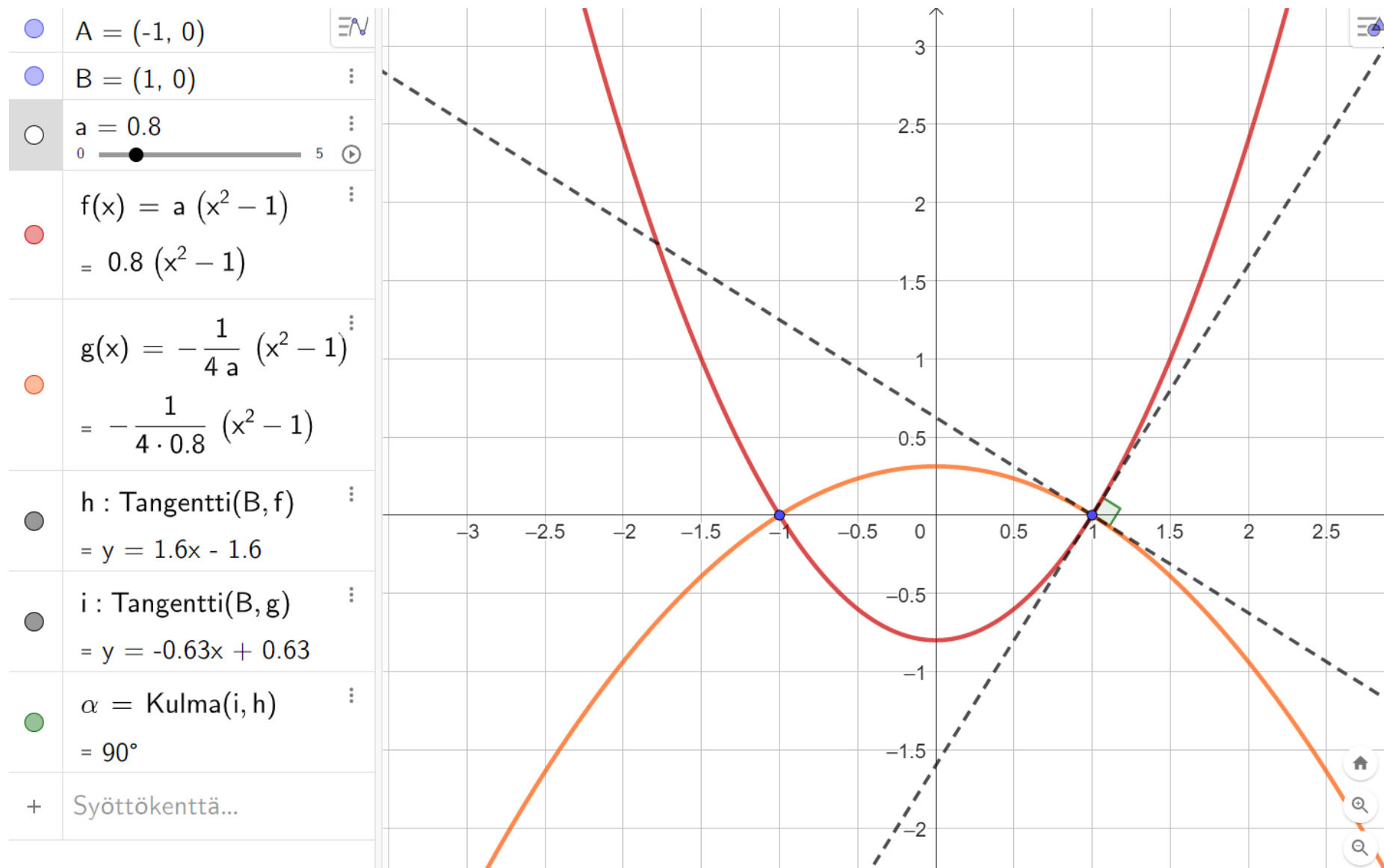
Tangenttien kulmakertoimet ovat derivaattojen arvot  $f'(1)$  ja  $g'(1)$ .

$$f'(x) = 2ax \text{ ja } g'(x) = 2bx \implies f'(1) = 2a \text{ ja } g'(1) = 2b.$$

Kohtisuoruudelle saadaan ehto  $2a \cdot 2b = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4a}$ .

Paraabelit  $y = f(x) = a(x^2 - 1)$  ja  $y = g(x) = -\frac{1}{4a}(x^2 - 1)$  leikkaavat toisensa kohtisuorasti kaikilla nollasta eroavilla parametrin  $a$  arvoilla.

Tarkistetaan tulos GeoGebran avulla:



3. Kohtisuorasti pisteessä  $(1, 0)$  ja  $(-1, 0)$  leikkaavista paraabeleista toinen on ylöspäin aukeava ja toinen alaspäin aukeava (koska  $b = -\frac{1}{4a}$ ). Valitaan paraabeli  $y = f(x)$  ylöspäin aukeavaksi, jolloin  $a > 0$ .

Alaspäin aukeava paraabeli  $y = g(x)$  on välillä  $]-1, 1[$  ylempänä, joten paraabelien väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan integraalista laskinohjelman avulla:

$$\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx = \frac{4a^2 + 1}{3a}$$

$$f(x) := a \cdot (x^2 - 1) \quad \text{Valmis}$$

$$g(x) := b \cdot (x^2 - 1) \quad \text{Valmis}$$

$$b := \frac{-1}{4 \cdot a} \quad \frac{-1}{4 \cdot a}$$

$$\int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx \quad \frac{4 \cdot a^2 + 1}{3 \cdot a}$$

Merkitään pinta-alaa funktiolla  $h(a) = \frac{4a^2 + 1}{3a}, a > 0$ .

Määritetään funktion  $h$  pienin arvo derivaatan avulla.

$$h'(a) = \frac{4a^2 - 1}{3a^2}, a > 0.$$

Derivaatan nollakohta eli yhtälön  $h'(a) = 0$  ainoa ratkaisu ehdolla  $a > 0$ , on  $a = \frac{1}{2}$ .

Derivaattafunktion merkki määräytyy osoittajasta  $4a^2 - 1$ , jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Derivaatan merkki kohdassa  $a = \frac{1}{2}$  vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi, joten pinta-alan pienin arvo saavutetaan tässä kohdassa.

Tämä arvo on  $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ .

$$h(a) := \frac{4 \cdot a^2 + 1}{3 \cdot a}$$

Valmis

$$dh(a) := \frac{d}{da}(h(a))$$

Valmis

$$\triangle dh(a)$$

$$\frac{4 \cdot a^2 - 1}{3 \cdot a^2}$$

$$\text{solve}(dh(a)=0, a) | a > 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{4}{3}$$

Tarkistetaan myös tämä GeoGebralla:

