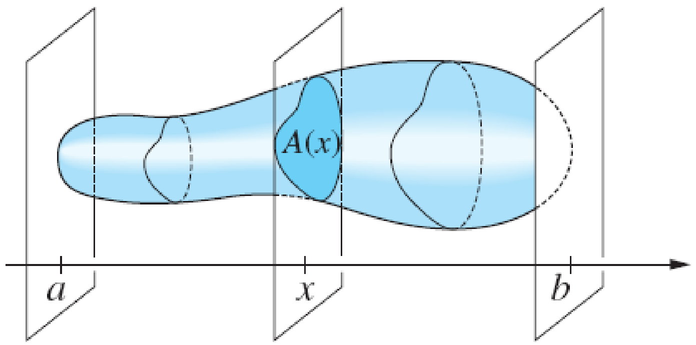
Tilavuusintegraali

- Kappaleen tilavuus voidaan laskea integraalina, jos kappaleen poikkileikkaus saadaan esitettyä integroimismuuttujan (x) lausekkeena.

$$V = \int_a^b A(x)dx$$



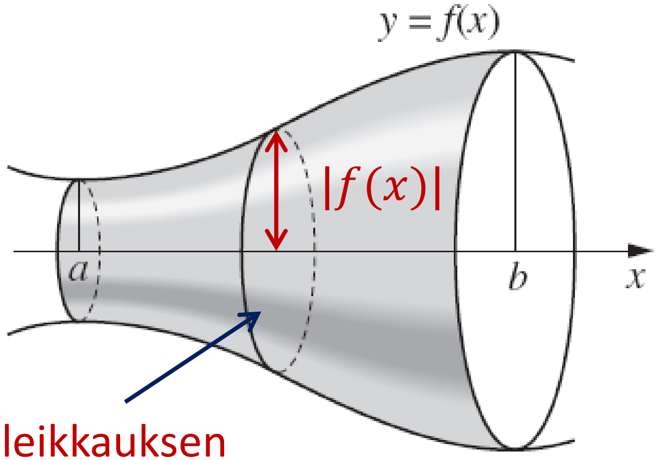
Kappaleen voidaan ajatella koostuvan äärettömän ohuista siivuista (lieriöistä), joiden pohjan pinta-ala on $A(x)$ ja korkeus (eli pohjien välimatka) dx.

- $A(x)$ on x –akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x.

Pyörähdyskappaleen tilavuus

- Tarkastellaan tapausta, jossa käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x –akselin ympäri.
- Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan tilavuusintegraalina. Poikkileikkaus on nyt ympyrä, jonka säde $r = |f(x)|$ ja pinta-ala $A(x) = \pi f(x)^2$.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$



Poikkileikkauksen pinta-ala

$A(x) = \pi |f(x)|^2 = \pi f(x)^2$

t. 505, s. 122

Merkitään $f(x) = e^x - 2$. Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = \pi \int_0^1 f(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (e^x - 2)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 4e^x + 4) dx$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$= \pi \Big/_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x + 4x\right)$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}e^2 - 4e^1 + 4 \cdot 1 - \left(\frac{1}{2}e^0 - 4e^0 - 4 \cdot 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}e^2 - 4e + 4 - \left(\frac{1}{2} - 4\right)\right] = \pi\left(\frac{1}{2}e^2 - 4e + \frac{15}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}(e^2 - 8e + 15)$$

Tarkistus:

f(x)=pi*(1/2*e^(2x)-4e^x+4x)

f(1)-f(0)
= 1,00971019

pi/2*(e^2-8*e+15)
= 1,00971019

B-osassa koetta voi mallikuvan pyörähdyskappaleesta piirtää komennolla ”Pinta”. Kulmaksi laitetaan 2π eli 360°, jolloin funktio pyörähtää täyden kierroksen pyörähdysakselin ympäri. Jos akselia ei erikseen määritetä, pyörähtää funktio x-akselin ympäri. Pyörähtävä funktio kannattaa ensin rajoittaa tarkasteluvälille.

$f(x) = e^x - 2, \quad (0 \le x \le 1)$

$a = \text{Pinta}(f, 2\pi, \text{xAkseli})$

$$= \begin{pmatrix} u \\ \text{Jos}(0 \le u \le 1, e^u - 2)\ \cos(v) \\ \text{Jos}(0 \le u \le 1, e^u - 2)\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

\+ Syöttökenttä...