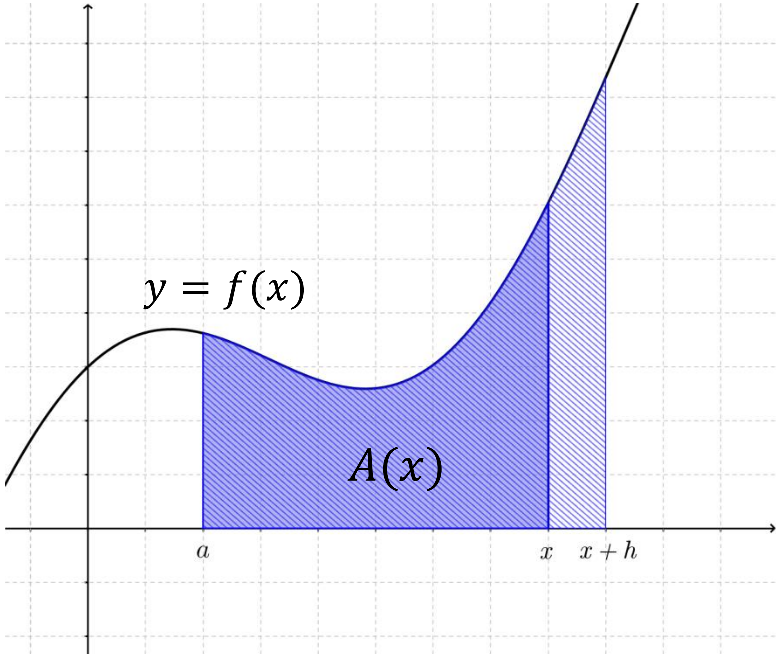
Pinta-alan ja integraalien yhteys

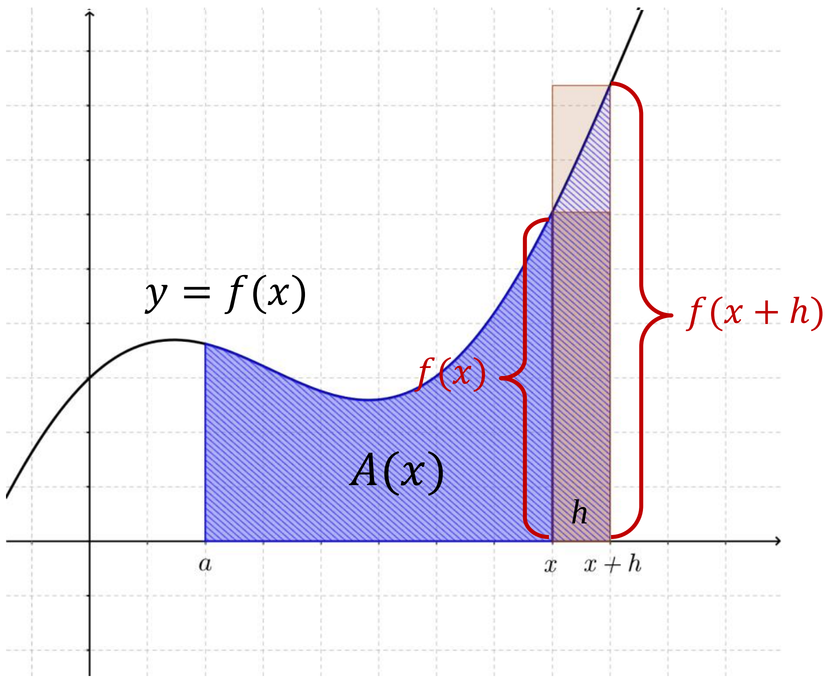
- Olkoon f jatkuva ja epänegatiivinen funktio ja $A(x)$ *pinta-alafunktio*, joka kertoo käyrän ja x –akselin rajaaman pinta-alan jostain kiinteästä alarajasta a pisteeseen x.
- Perustellaan, että $A'(x) = f(x)$
  - Oletetaan, että f on kasvava kohdan x ympäristössä. Vähenevälle funktiolle tulos voidaan todistaa vastaavalla tavalla.



Kuvan oikean reunan kaistaleen pinta-ala on

$$A(x + h) - A(x).$$

Tätä pinta-alaa voidaan myös arvioida kahden suorakulmion avulla:



$$h \cdot f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq h \cdot f(x+h)$$

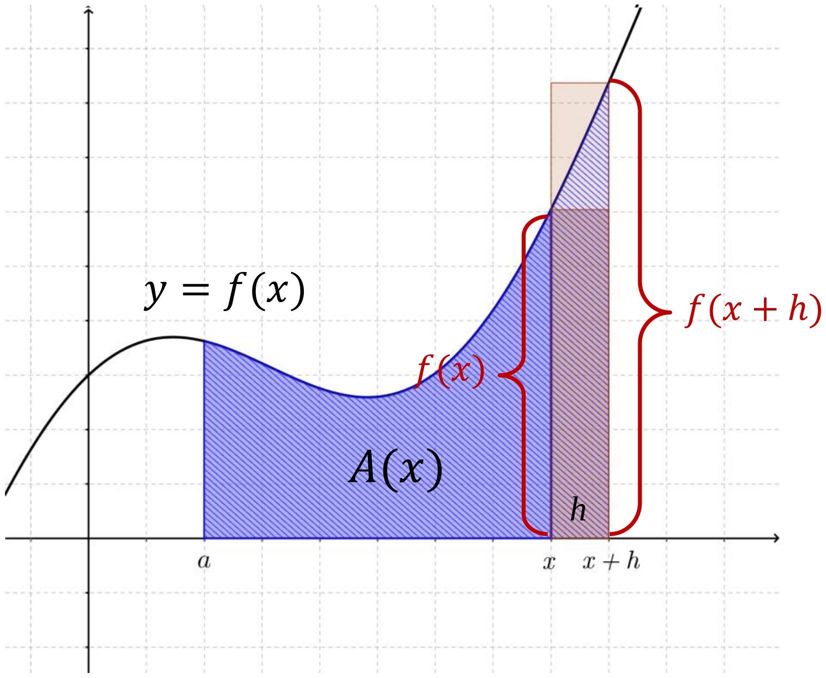
Jaetaan epäyhtälö puolittain suorakulmion leveydellä h.

Funktion arvojen väliin jää lauseke, joka on erotusosamäärän muotoa:

$$f(x) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Kun suorakulmion leveys h lähestyy nollaa, niin erotusosamäärä lähestyy pinta-alafunktion derivaattaa:

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \longrightarrow A'(x),$$



Lisäksi $f(x+h) \longrightarrow f(x)$, kun $h \longrightarrow 0$, koska f on jatkuva.

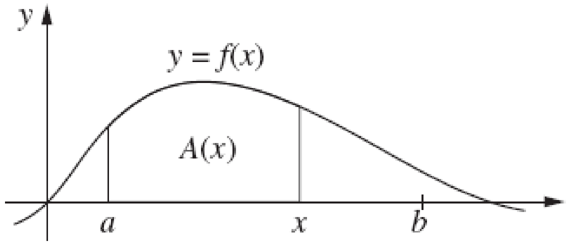
Erotusosamäärä on näiden toisiaan lähestyvien funktion arvojen välissä, joten $A'(x) = f(x)$.

Derivaatan määritelmä:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	funktion f derivaattafunktio
$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	derivaatta kohdassa x_0

- Täten välin $[a, b]$ jokaisessa pisteessä pinta-alafunktiolle A pätee

$$A'(x) = f(x).$$



- Toisin sanoen tulos tarkoittaa sitä, että pinta-alafunktio A välillä $[a, b]$ on funktion f integraalifunktio.
- Pinta-aloja voidaan laskea seuraavan tuloksen (pinta-alalause) avulla:
- Oletetaan, että funktio f on välillä $[a, b]$ jatkuva ja epänegatiivinen. Tällöin funktion f kuvaajan ja x −akselin välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-ala on

$$A = F(b) - F(a),$$

missä F on funktion f (mikä tahansa) integraalifunktio.

Pinta-alalauseen todistus:

Edellä todistetun perusteella pinta-alafunktio on jokin f:n integraalifunktio.
Tämä tarkoittaa, että $A(x) = F(x) + C$, missä $F'(x) = f(x)$.

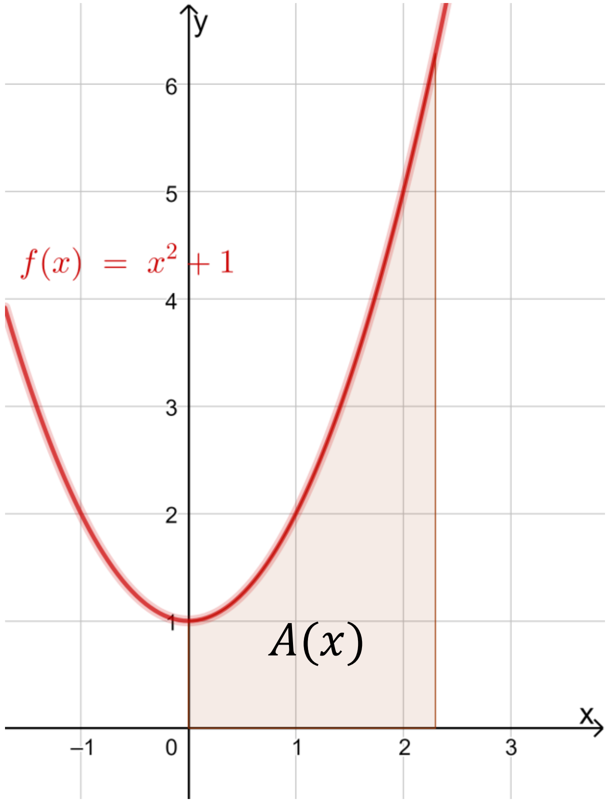
Erityisesti $A(a) = F(a) + C = 0$, koska yhtään pinta-alaa ei ole vielä kertynyt alarajan kohdalla.

Tästä saadaan integroimisvakiolle arvo $C = -F(a)$.

Siis $A(x) = F(x) - F(a)$ ja $A = A(b) = F(b) - F(a)$.

t. 306, s. 63

a) Funktio f on jatkuva ja epänegatiivinen, joten pinta-alafunktion derivaatalle pätee $A'(x) = f(x)$. Siis A on f:n eräs integraalifunktio.



$$A(x) = \int f(x)dx = \int (x^2 + 1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

Vakio C voidaan määrittää ehdosta $A(0) = 0$:

$$A(0) = \frac{1}{3}0^3 + 0 + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0$$

Siis $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$.

b) Kysytty pinta-ala on (pinta-alalauseen perusteella)

$$A = A(3) - A(1) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1\right) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$