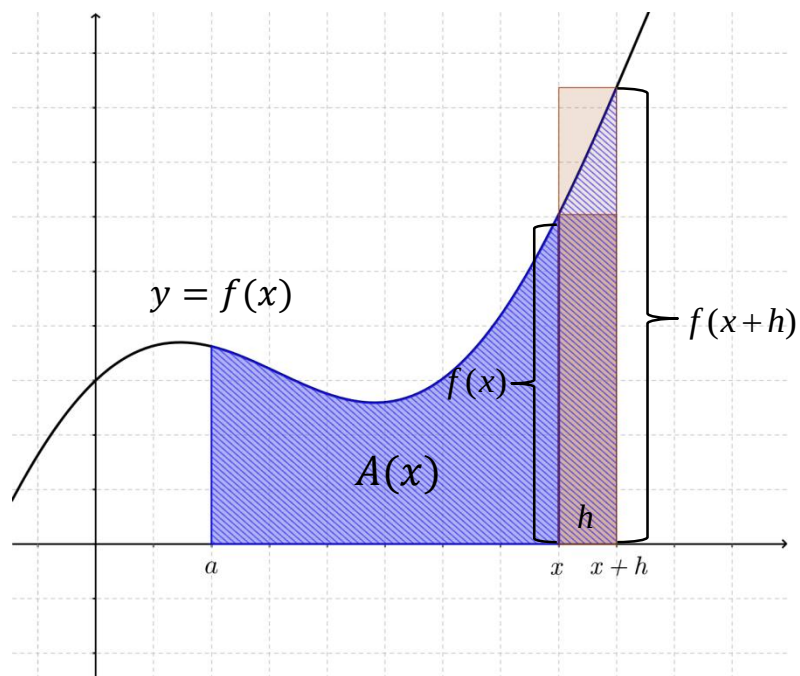


Pinta-alafunktion derivaattalause

Olkoon f jatkuva ja epänegatiivinen funktio ja $A(x)$ pinta-alafunktio, joka kertoo käyrän ja x -akselin rajaaman pinta-alan jostain kiinteästä alarajasta a pisteeseen x .

Perustellaan, että $A'(x) = f(x)$: *Erityistapaus: f on kasvava kohdan x ympäristössä.
(Vähenevälle funktiolle perustelu voidaan tehdä vastaavalla tavalla.)*



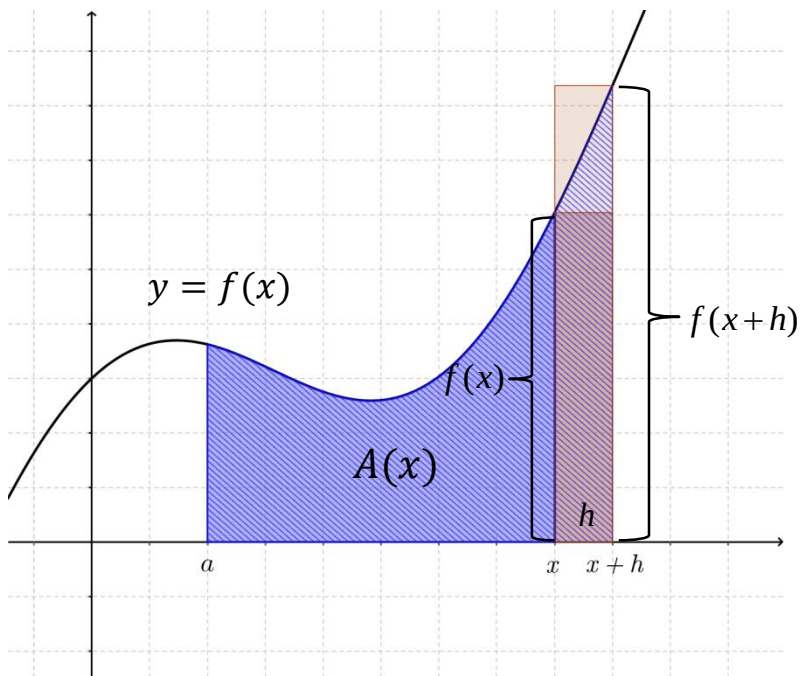
Kuvan oikean reunan kaistaleen pinta-ala on

$$A(x + h) - A(x).$$

Tätä pinta-alaa voidaan myös arvioida kahden suorakulmion avulla:

$$h \cdot f(x) \leq A(x + h) - A(x) \leq h \cdot f(x + h) \quad | : h$$

Jaetaan epäyhtälö puolittain suorakulmion leveydellä h .



$$f(x) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Kun suorakulmion leveys h lähestyy nollaa, niin erotusosamäärä lähestyy pinta-alafunktion derivaattaa:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \rightarrow A'(x), \quad \text{kun } h \rightarrow 0.$$

Kertaa tarvittaessa derivaatan määritelmä!

Lisäksi $f(x+h) \rightarrow f(x)$, kun $h \rightarrow 0$.

(Koska f on jatkuva.)

Erotusosamäärä on näiden toisiaan lähestyvien funktion arvojen välissä, joten $A'(x) = f(x)$.

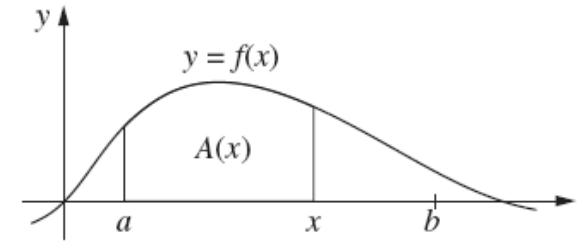
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	funktion f derivaatafunktio
$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	derivaatta kohdassa x_0

Näin saatiin tärkeä tulos, pinta-alafunktion derivaattalause:

Välin $[a, b]$ jokaisessa pisteessä pätee

$$A'(x) = f(x)$$

eli pinta-alafunktio A on välillä $[a, b]$ funktion f integraalifunktio.



Pinta-alalause:

Oletetaan, että funktio f on välillä $[a, b]$ jatkuva ja epänegatiivinen. Tällöin funktion f kuvaajan ja x –akselin välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-ala on

$$A = F(b) - F(a),$$

missä F on funktion f (mikä tahansa) integraalifunktio.

Koska mikä tahansa funktion f integraalifunktio F käy, niin valitaan integroimisvakioksi $C = 0$.

(Joka tapauksessa C häviää vähennyslaskussa.)

Todistus:

Derivaattalauseen perusteella $A(x) = F(x) + C$, missä F on funktion f jokin integraalifunktio.

Erityisesti $A(a) = F(a) + C = 0$, josta saadaan $C = -F(a)$.

Siis $A(x) = F(x) - F(a)$ ja $A = A(b) = F(b) - F(a)$.

t. 306, s. 63

- a)** Funktio f on jatkuva ja epänegatiivinen, joten pinta-alafunktion derivaattalauseen perusteella $A'(x) = f(x)$ eli A on f :n eräs integraalifunktio.

$$A(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

Vakio C voidaan määrittää ehdosta $A(0) = 0$:

$$A(0) = \frac{1}{3}0^3 + 0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

Siis $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$.

- b)** Kysytty pinta-ala on (pinta-alalauseen perusteella)

$$A = A(3) - A(1) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^2 + 1 \right) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

