Määrätty integraali

- Olkoon funktio f määritelty ja jatkuva välillä $[a, b]$.
- Jos F on funktion f jokin integraalifunktio, niin erotus $F(b) - F(a)$ on funktion f *määrätty integraali* a:sta b:hen.
- Määrätylle integraalille käytetään merkintää

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$a =$ alaraja
$b =$ yläraja

Yleensä siis $b > a$, mutta tämä ei ole välttämätöntä.

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

- Olkoot f ja g välillä $[a, b]$ jatkuvia funktioita. Seuraavat ominaisuudet voidaan todistaa määritelmän perusteella (ks. oppikirja s. 69-73):

1. Lineaarisuus (eli termeittäin integrointi ja vakion siirto):

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

”Tavallisten integraalien” laskusääntöjen täytyy päteä myös määrätyille integraaleille.

2. Integroimisvälin jakaminen osiin:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, \qquad a < c < b$$

Integroitava funktio voi joskus olla määritelty osissa, jolloin funktion lauseke saattaa vaihtua integroimisvälillä.

3. Rajojen vaihto:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Joskus sijoituslauseketta voi sieventää vaihtamalla rajat toisin päin. (Miinusten kanssa sattuu usein virheitä…)

4. Tyhjä väli:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Määrätyn integraalin laskeminen

1. Määritetään jokin funktion f integraalifunktio F. Käytännössä valitaan aina $C = 0$.
2. Muodostetaan erotus $F(b) - F(a)$ käyttämällä *sijoitusmerkintää*

$$\int_a^b f(x)dx = \Big/_{\!a}^{\,b} F(x) = F(b) - F(a).$$

3. Lasketaan ja sievennetään erotus. Tarkista huolellisesti! (Apuna kannattaa käyttää SpeedCrunch:ia)

Esimerkkejä:

1. $\int_1^3 (x^3 - 2)dx = \Big/_1^3 \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x\right)$

$= \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1\right)$ ”Yläraja miinus alaraja”

$= \frac{81}{4} - 6 - \left(\frac{1}{4} - 2\right) = \frac{81}{4} - 6 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{80}{4} - 4 = 20 - 4 = 16$

SpeedCrunch:

```
F(x)=1/4*x^4-2x

F(3)-F(1)
= 16
```

TI-Nspire:

$\int_1^3 (x^3 - 2) dx$ 16

2. $$\int_2^4 x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\Big/_{2}^{4}\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\Big/_{2}^{4}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(4^2-1)^{\frac{3}{2}} - (2^2-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left(15^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{15^3} - \sqrt{3^3}\right) = \frac{1}{3}\left(15\sqrt{15} - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= 5\sqrt{15} - \sqrt{3}$$

Lauseke voitaisiin myös muokata juurimuotoon $(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

SpeedCrunch:

```
F(x)=1/3*(x^2-1)^(3/2)

F(4)-F(2)
= 17,632 865 923 468 207 132 37

5sqrt(15)-sqrt(3)
= 17,632 865 923 468 207 132 37
```

TI-Nspire:

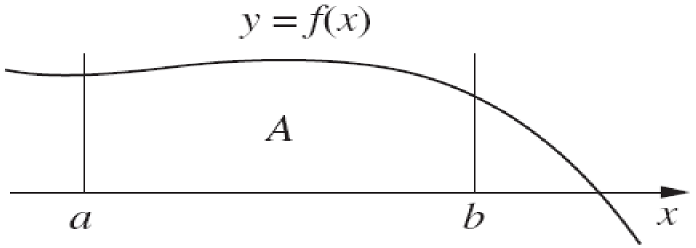
$$\int_2^4 \left(x\cdot\sqrt{x^2-1}\right)dx \qquad 5\cdot\sqrt{15}-\sqrt{3}$$

Määrätty integraali ja pinta-ala

- Määrätyn integraalin avulla voidaan esimerkiksi laskea jatkuvan funktion kuvaajan rajaamia pinta-aloja (vrt. pinta-alafunktio)

1. $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$

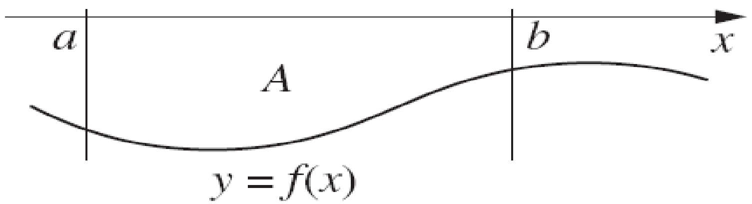
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



Määrätty integraali ei aina liity pinta-alaan, mutta kuvaajaa voi silti käyttää vastauksen mielekkyyden arviointiin.

2. $f(x) < 0$ välillä $[a, b]$

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

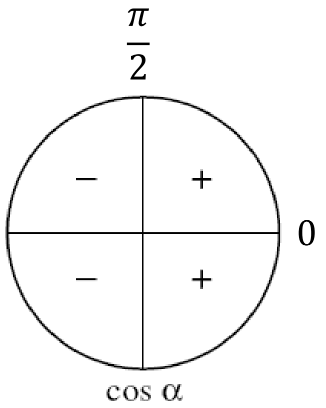


Huom!
Määrätty integraali antaa negatiivisena x −akselin alapuolisen pinta-alan.

t. 322, s.74

$f(x) = \cos 2x$

Yksikköympyrän (ja kuvaajan) perusteella $f(x) \geq 0$ välillä $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.



$\cos 2 \cdot 0 = \cos 0 = 1$

$\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

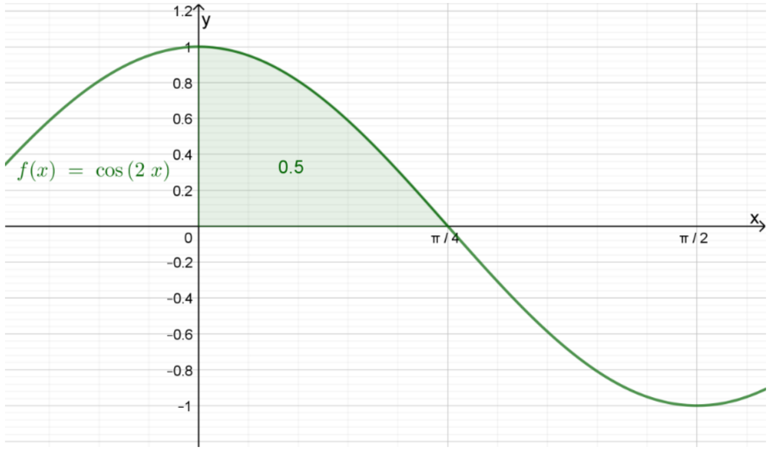
Kysytty pinta-ala saadaan siis määrättynä integraalina

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

$$= \Big/_{0}^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \overbrace{\sin(2 \cdot 0)}^{0}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$



A-osassa koetta SpeedCrunch apuun sijoitus-vaiheessa:

F(x)=1/2*sin(2x)

F(pi/4)-F(0)
= 0,5

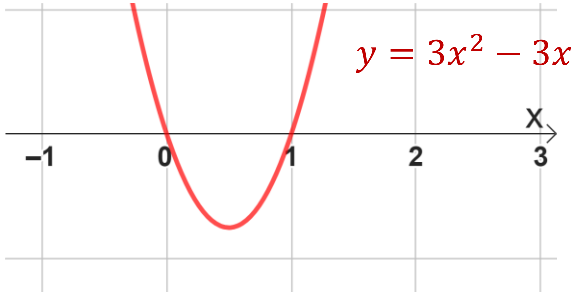
Esimerkki: Laske $\int_0^3 (|3x^2 - 3x| + x)dx$.

Esitetään lauseke $|3x^2 - 3x| + x$ ilman itseisarvomerkintää.

Itseisarvolausekkeen nollakohdat:

$$3x^2 - 3x = 3x(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Kuvaaja:



Itseisarvon sisällä oleva lauseke on negatiivinen vain välillä $0 < x < 1$, joten

$$|3x^2 - 3x| + x = \begin{cases} -(3x^2 - 3x) + x \\ (3x^2 - 3x) + x \end{cases} = \begin{cases} -3x^2 + 4x & ,\text{kun } 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 2x & ,\text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Nyt määrätty integraali voidaan laskea osissa:

$$\int_0^3 (|3x^2 - 3x| + x)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 4x)dx + \int_1^3 (3x^2 - 2x)dx$$

$$\int_0^1 (-3x^2 + 4x)dx + \int_1^3 (3x^2 - 2x)dx \;= \Big/_0^1 (-x^3 + 2x^2) + \Big/_1^3 (x^3 - x^2)$$

$$= (-1^3 + 2 \cdot 1^2) + (3^3 - 3^2) - (1^3 - 1^2) = -1 + 2 + 27 - 9 = 19$$

Tarkistus:

SpeedCrunch:

F(x)=-x^3+2x^2

G(x)=x^3-x^2

F(1)-F(0)+G(3)-G(1)
= 19