

# Määrätty integraali

- Olkoon funktio  $f$  määritelty ja jatkuva välillä  $[a, b]$ .
- Jos  $F$  on funktion  $f$  jokin integraalifunktio, niin erotus  $F(b) - F(a)$  on funktion  $f$  määrätty integraali  $a$ :sta  $b$ :hen.
- Määrätylle integraalille käytetään merkintää

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$a$  = alaraja

$b$  = yläraja

Yleensä siis  $b > a$ , mutta tämä ei ole välttämätöntä.

# Määrätyn integraalin ominaisuuksia

- Olkoot  $f$  ja  $g$  välillä  $[a, b]$  jatkuvia funktioita. Seuraavat ominaisuudet voidaan todistaa määritelmän perusteella (ks. oppikirja s. 69-73):
  1. Lineaarisuus (eli termeittäin integrointi ja vakion siirto):

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

”Tavallisten integraalien” laskusääntöjen täytyy päteä myös määrätuille integraaleille.

## 2. Integroimisvälin jakaminen osiin:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a < c < b$$

Integroitava funktio voi joskus olla määritelty osissa, jolloin funktion lauseke saattaa vaihtua integroimisvälillä.

## 3. Rajojen vaihto:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Joskus sijoituslauseketta voi sieventää vaihtamalla rajat toisin päin. (Miinusten kanssa sattuu usein virheitä...)

## 4. Tyhjä väli:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

# Määrätyn integraalin laskeminen

1. Määritetään jokin funktion  $f$  integraalifunktio  $F$ . Käytännössä valitaan aina  $C = 0$ .
2. Muodostetaan erotus  $F(b) - F(a)$  käyttämällä *sijoitusmerkintää*

$$\int_a^b f(x) dx = \left/ F(x) \right/_a^b = F(b) - F(a).$$

3. Lasketaan ja sievennetään erotus. Tarkista huolellisesti!

## Esimerkkejä:

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_1^3 (x^3 - 2) dx &= \left/ \left( \frac{1}{4} x^4 - 2x \right) \right. \\ &= \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3 - \left( \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1 \right) && \text{"Yläraja miinus alaraja"} \\ &= \frac{81}{4} - 6 - \left( \frac{1}{4} - 2 \right) = \frac{81}{4} - 6 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{80}{4} - 4 = 20 - 4 = 16 \end{aligned}$$

TI-Nspire:

$$\int_1^3 (x^3 - 2) dx$$

16

$$2. \int_2^4 x\sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int_2^4 2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \Big/ \frac{2}{3} (x^2-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \Big/ \underbrace{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{3} \left[ (4^2-1)^{\frac{3}{2}} - (2^2-1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{3} (15^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{15^3} - \sqrt{3^3}) = \frac{1}{3} (15\sqrt{15} - 3\sqrt{3})$$

$$= 5\sqrt{15} - \sqrt{3}$$

Lauseke voitaisiin myös muokata juurimuotoon  $(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

TI-Nspire:

$$\int_2^4 (x \cdot \sqrt{x^2-1}) dx$$

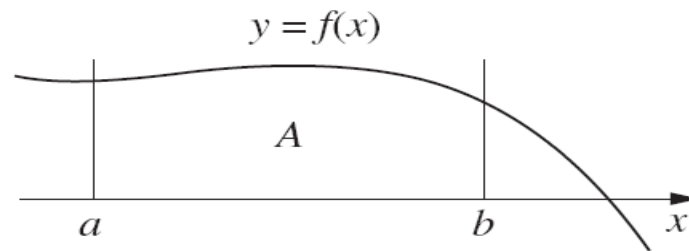
$$5 \cdot \sqrt{15} - \sqrt{3}$$

# Määrätty integraali ja pinta-ala

- Määrätyn integraalin avulla voidaan esimerkiksi laskea jatkuvan funktion kuvaajan rajaamia pinta-aloja (vrt. pinta-alafunktio)

- $f(x) \geq 0$  välillä  $[a, b]$

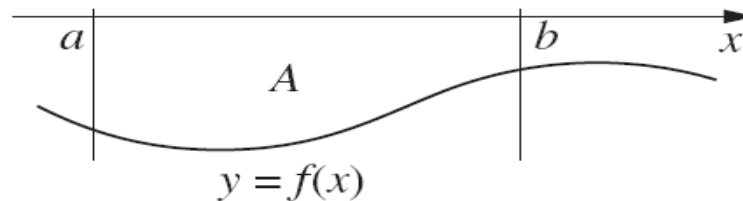
$$A = \int_a^b f(x) dx$$



Määrätty integraali ei aina liity pinta-alaan, mutta kuvaajaa voi silti käyttää vastauksen mielekkyyden arviointiin.

- $f(x) < 0$  välillä  $[a, b]$

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$



Huom!  
Määrätty integraali antaa negatiivisena  $x$  -akselin alapuolisen pinta-alan.

**t. 322, s.74**

$$f(x) = \cos 2x$$

Yksikköympyrän (ja kuvaajan) perusteella  $f(x) \geq 0$  välillä  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

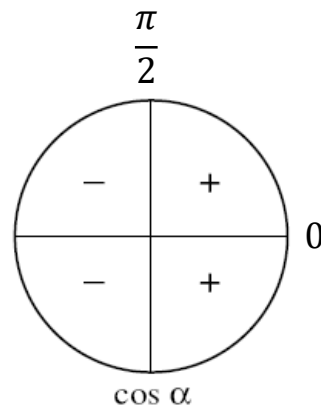
Kysytty pinta-ala saadaan siis määrättyä integraalina

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left( 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \overbrace{\sin(2 \cdot 0)}^0$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$



$$\cos 2 \cdot 0 = \cos 0 = 1$$

$$\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$



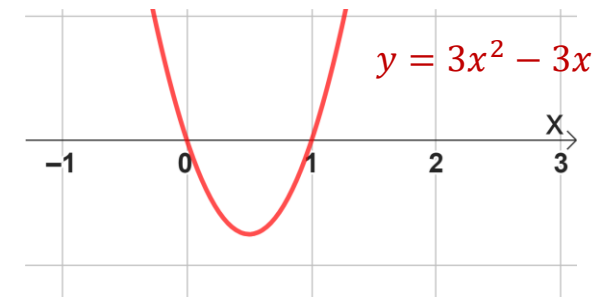
**Esimerkki:** Laske  $\int_0^3 (|3x^2 - 3x| + x)dx$ .

Esitetään lauseke  $|3x^2 - 3x| + x$  ilman itseisarvomerkintää.

Itseisarvolausekkeen nollakohdat:

$$3x^2 - 3x = 3x(x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Kuvaaja:



Itseisarvon sisällä oleva lauseke on negatiivinen vain välillä  $0 < x < 1$ , joten

$$|3x^2 - 3x| + x = \begin{cases} -(3x^2 - 3x) + x & , \text{ kun } 0 < x < 1 \\ (3x^2 - 3x) + x & , \text{ kun } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -3x^2 + 4x & , \text{ kun } 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 2x & , \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Nyt määrätty integraali voidaan laskea osissa:

$$\int_0^3 (|3x^2 - 3x| + x)dx = \int_0^1 (-3x^2 + 4x)dx + \int_1^3 (3x^2 - 2x)dx$$

$$\int_0^1 (-3x^2 + 4x)dx + \int_1^3 (3x^2 - 2x)dx = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2) + \int_1^3 (x^3 - x^2)$$

$$= (-1^3 + 2 \cdot 1^2) + (3^3 - 3^2) - (1^3 - 1^2) = -1 + 2 + 27 - 9 = 19$$

