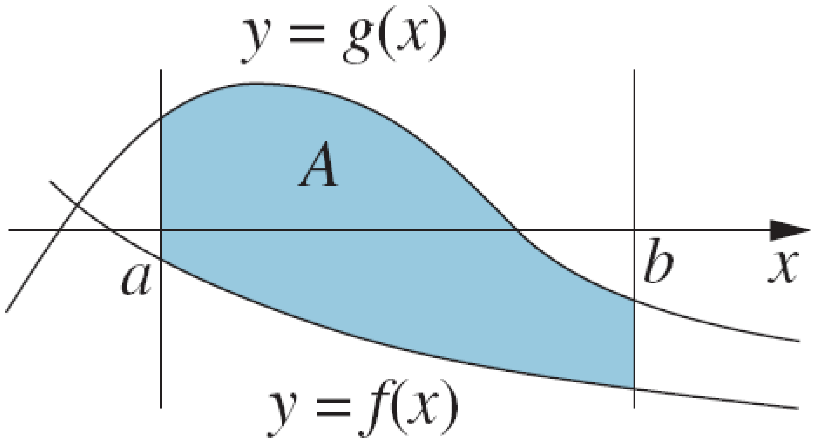
Kahden käyrän rajaaman alueen pinta-ala

- Kahden käyrän $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-ala A saadaan integraalista

$$A = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx,$$



missä $y = g(x)$ on välillä $[a, b]$ ylempänä oleva käyrä.

Pinta-alan laskeminen vaiheittain

A-osa:

1. Ratkaise käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ mahdollisten leikkauspisteiden x −koordinaatit yhtälöstä $f(x) = g(x)$.
2. Jos käyrät leikkaavat, jaa integroimisväli leikkauspisteiden mukaisiin osiin.
3. Selvitä, kumpi käyristä on ylempänä leikkauspisteiden välillä testipisteiden avulla. Jos leikkauspisteitä ei ole, niin toinen käyrä on ylempänä koko integroimisvälillä.
4. Hahmottele kuvaajat (suttupaperille). Ratkaisuun lisättynä piirros voi myös toimia perusteluna testipisteiden sijaan.

5. Muodosta ja sievennä erotusfunktioiden (ylempi – alempi) lausekkeet.
    - Huomaa, että vähennyslaskujärjestyksen muuttumisen voi korvata kääntämällä integroimisrajat toisin päin. Tämä saattaa vähentää sijoitusvirheitä.
6. Laske erotusfunktioiden määrätyt integraalit ja yhdistä tulokset.
7. Arvioi mahdollisuuksien mukaan tuloksen järkevyyttä esimerkiksi mallikuvion avulla.

B-osa:

1. Piirrä (GeoGebralla) kuva tilanteesta.
    - Huom! Toiminnolla ”Integraaliväli” saa väritettyä kyseessä olevan pinta-alan, mutta toimintoa ei kannata käyttää integraalin laskemiseen.
2. Ratkaise käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ mahdollisten leikkauspisteiden x −koordinaatit yhtälöstä $f(x) = g(x)$ laskinohjelmistolla CAS-tilassa.

3. Jos leikkauspisteet rajaavat tutkittavan alueen, integroimisrajoiksi valitaan vasemman- ja oikeanpuolimmaisten leikkauspisteiden x –koordinaatit. (Muussa tapauksessa rajat on kerrottu tehtävänannossa.)
4. Lasketaan CAS-tilassa erotusfunktion itseisarvon määrätty integraali.

$$\int_a^b |g(x) - f(x)|dx$$

Vähennyslaskun järjestyksellä ei tässä ole merkitystä.

- Itseisarvoa käytettäessä ei siis tarvita tietoa käyrien sijainnista toisiinsa nähden tai mahdollisista leikkauspisteistä välin sisällä.
- Huom! GeoGebra suoriutuu TI-Nspireä paremmin itseisarvofunktion määrätyn integraalin tarkan arvon laskemisesta.
- Jos laskinohjelma ei anna tarkkaa arvoa (sellaisessa tehtävässä, jossa tarkka arvo vaaditaan), niin pura itseisarvo muotoon ”suurempi – pienempi”, kuten A-osassa.

Yo-tehtävä K1998/7
(vrt. t. 443, s. 101)

Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän, trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ väliin, kun $x \in [0, \pi]$. Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkö on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 11 500 mk/ha. Kuinka paljon metsän omistaja saa korvausta?

Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet:

$$\sin 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = x + n2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - x + n2\pi$$

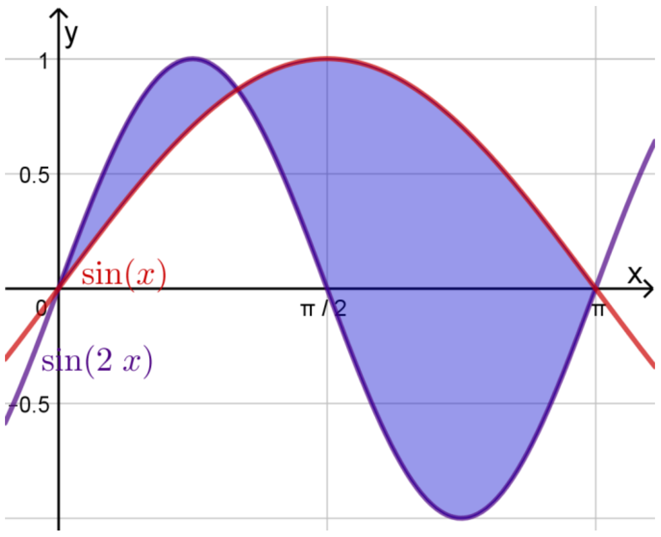
$$\Leftrightarrow \quad x = n2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = \pi + n2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n\frac{2}{3}\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Välillä $[0, \pi]$ ratkaisuja ovat $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$ tai $x = \pi$.

Pinta-ala saadaan integraalina $A = \int_0^{\pi} |\sin 2x - \sin x| dx.$

Kuvaajan tai testipisteiden perusteella välillä $]0, \pi/3[$ käyrä $y = \sin 2x$ on ylempänä ja vastaavasti välillä $]\pi/3, \pi[$ alempana. (Sinifunktioiden kuvaajat pitäisi pystyä hahmottelemaan ilman laskinohjelmistojakin.)



sin(2*pi/4)
= 1

sin(pi/4)
= 0,7071067811865475244

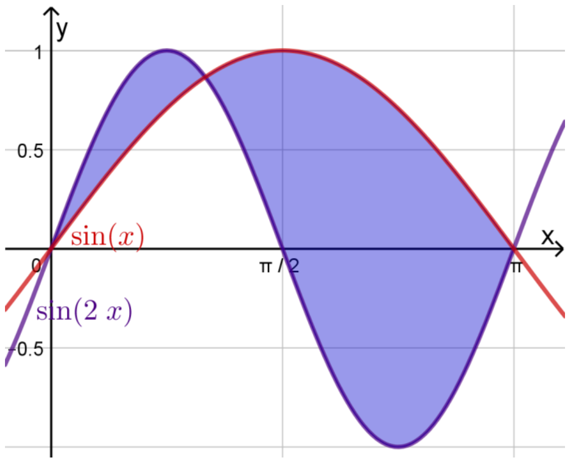
sin(2*pi/2)
= 0

sin(pi/2)
= 1

$$A = \int_0^{\pi} |\sin 2x - \sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx$$

Näin saatiin identtiset funktiot integroitavaksi ja vastaavasti myös sijoituksiin.



$$A = \Big/_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right) + \Big/_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right)$$

$$A = -\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2}\cos 2\pi + \cos \pi\right)$$

$$A = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1 + 1\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1 - 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Näin hankalissa sijoituksessa tulee herkästi virheitä, joten SpeedCrunchin käyttäminen tarkistuksessa on pakollista. Huomaa myös, että tehtävä perustuu mallinnukseen (ja mittauksiin), joten likiarvoratkaisu voisi muutenkin kelvata.

```
F(x)=-1/2*cos(2x)+cos(x)

F(pi/3)-F(0)+F(pi/3)-F(pi)
= 2,5
```

Tarkistaminen helpottuu, kun voidaan käyttää vain yhtä integraalifunktiota.

Pinta-ala on siis $2{,}5\ \mathrm{km}^2 = 250\ \mathrm{ha}$. Metsän omistaja saa siis korvausta $11\,500\ \mathrm{mk/ha} \cdot 250\ \mathrm{ha} = 2\,875\,000\ \mathrm{mk}$ eli n. 2,9 miljoonaa markkaa.

Jos symbolinen laskenta on käytössä (t. 443):

$\mathrm{solve}(\sin(2\cdot x)=\sin(x),x)|0\leq x\leq\pi$

$$x=0 \text{ or } x=\frac{\pi}{3} \text{ or } x=\pi$$

$\displaystyle\int_0^\pi |\sin(2\cdot x)-\sin(x)|\,dx$ 2.5

TI-Nspire ei anna tässä tarkkaa arvoa murtolukuna. Tarkan murtolukuarvon saa laskemalla integraalin osissa tai käyttämällä GeoGebran CAS-tilaa.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2\cdot x)-\sin(x))\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin(x)-\sin(2\cdot x))\,dx \qquad \frac{5}{2}$$

$f(x) = \sin(2\,x)$

$g(x) = \sin(x)$

Syöttökenttä...

1 integraali(|f − g|, 0, pi)

$\rightarrow \frac{5}{2}$

2