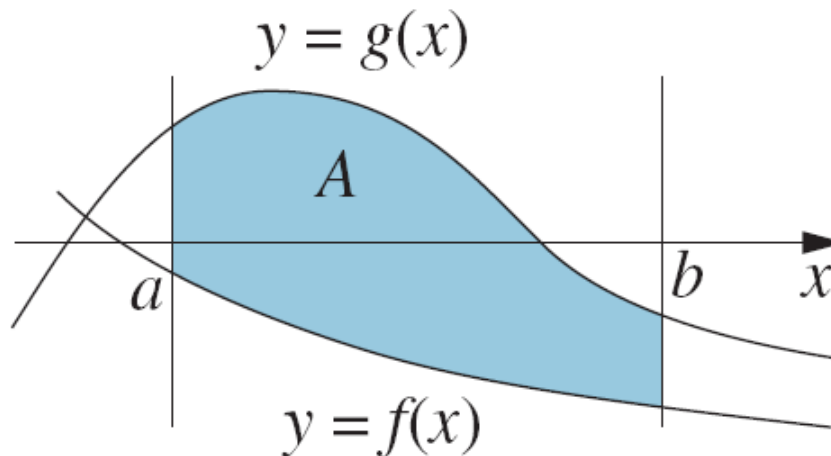


# Kahden käyrän rajaaman alueen pinta-ala

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Välillä  $[a, b]$  ylempänä  
oleva funktio



Ratkaisun vaiheet (A-osa):

1. Ratkaise kuvaajien leikkauspisteet yhtälöparista.
2. Selvitä, kumpi kuvaajista on ylempänä leikkauspisteiden välillä; esimerkiksi laskemalla molempien funktioiden arvo jossain välin pisteessä SpeedCrunch:lla.
3. Hahmottele kuvaajat (suttupaperille).
4. Muodosta ja sievennä erotusfunktion lauseke
5. Laske erotusfunktion määrätty integraali.

Jos CAS-laskenta sallittu:

$$A = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

Itseisarvon (abs) avulla pinta-  
alan saa laskettua riippumatta  
siitä kumpi käyrä on ylempänä.

**Yo-tehtävä K1998/7**  
(vrt. t. 443, s. 101)

Euroopan unionin tarkastaja mallintaa satelliittikuvassa näkyvän, trombin tuhoaman metsän alueeksi, joka jää käyrien  $y = \sin x$  ja  $y = \sin 2x$  väliin, kun  $x \in [0, \pi]$ . Mikä on tuhoalueen tarkka pinta-ala mallin mukaan? Pituuden mittayksikkö on kilometri. Oletetaan, että trombin tuhoista maksetaan korvausta 11 500 mk/ha. Kuinka paljon metsän omistaja saa korvausta?

Ratkaistaan käyrien leikkauspisteet:

$$\sin 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + n2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - x + n2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = n2\pi \quad \text{tai} \quad 3x = \pi + n2\pi$$

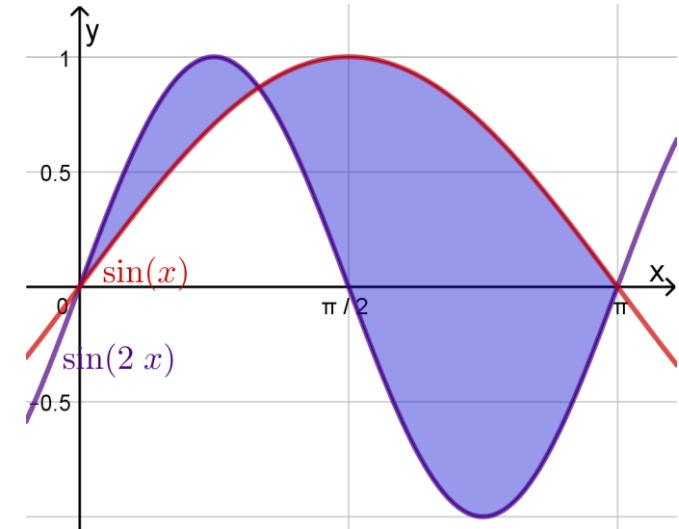
$$x = \frac{\pi}{3} + n\frac{2}{3}\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Välillä  $[0, \pi]$  ratkaisuja ovat  $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$  tai  $x = \pi$ .

Kuvaajan tai testipisteiden perusteella välillä  $]0, \pi/3[$  käyrä  $y = \sin 2x$  on ylempänä ja vastaavasti välillä  $] \pi/3, \pi[$  alempana.

Pinta-ala saadaan integraalina

$$A = \int_0^{\pi} |\sin 2x - \sin x| dx$$



$$\sin(2 \cdot \pi/4) \\ = 1$$

$$\sin(\pi/4) \\ = 0,7071067811865475244$$

$$\sin(2 \cdot \pi/2) \\ = 0$$

$$\sin(\pi/2) \\ = 1$$

$$A = \int_0^{\pi} |\sin 2x - \sin x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx$$

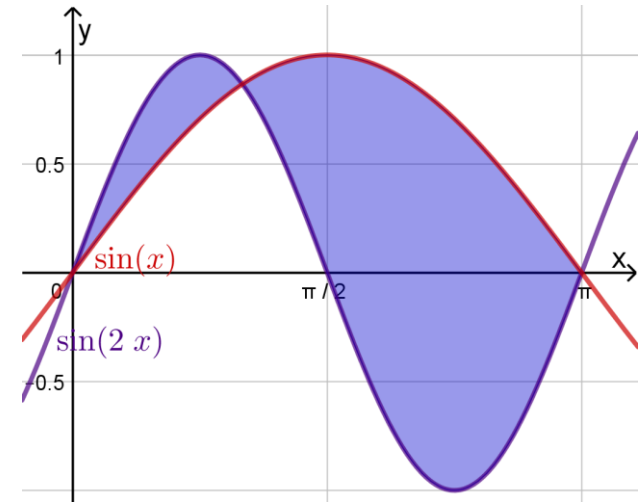
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left( -\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$A = -\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{1}{2} \cos 0 + \cos 0 \right) - \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 2\pi - \left( -\cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$A = -\frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} - \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \right) - (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 - \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{2} \text{ (km}^2\text{)}$$

Pinta-ala on siis  $2,5 \text{ km}^2 = 250 \text{ ha}$ . Metsän omistaja saa siis korvausta  
 $11\,500 \text{ mk/ha} \cdot 250 \text{ ha} = 2\,875\,000 \text{ mk}$  eli n. 2,9 miljoonaa markkaa.



SpeedCrunch:lla aika  
paljon helpommin:

$$f(x) = -1/2 * \cos(2x) + \cos(x)$$

$$g(x) = -f(x)$$

$$f(\pi/3) - f(0) + g(\pi) - g(\pi/3) = 2,5$$