

Yo-tehtävä K2025/12

12. Arvioitava integraali 12 p.

Olkoon $n \geq 0$ kokonaisluku. Todista epäyhtälö

$$\int_0^1 \sin(\pi x) (x(1+x)(1-x))^n dx \leq \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n.$$

Vihje: Jos $f(x) \leq g(x)$ välillä $[0, 1]$, niin $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx$.

Ratkaisu:

Integraali on liian monimutkainen laskettavaksi suoraan. Vihjeen mukaisesti pyritään korvaamaan integroitava funktio sellaisella funktiolla, joka on välillä $[0, 1]$ alkuperäistä suurempi.

Tutkitaan tätä varten funktiota $f(x) = x(1+x)(1-x)$.

Mahdollisimman yksinkertainen funktio, jolla funktion f voisi korvata, on vakiofunktio. Vakion arvoksi pitää valita funktion f suurin arvo välillä $[0, 1]$.

Tutkitaan funktiota f suljetulla välillä $[0, 1]$ derivaatan $f'(x) = 1 - 3x^2$ avulla.

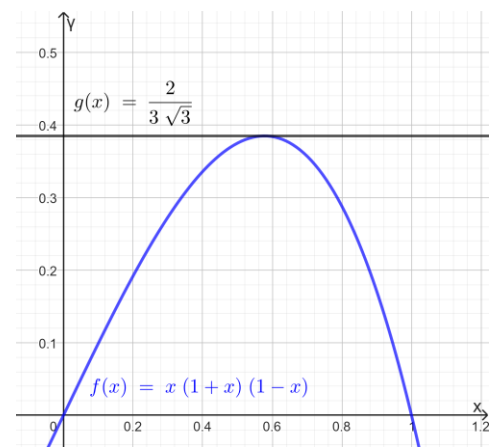
$$f(x) := x \cdot (1+x) \cdot (1-x) \quad \text{Valmis}$$

$$g(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \quad \text{Valmis}$$

$$g(x) \quad 1 - 3 \cdot x^2$$

$$\int_0^1 \sin(\pi x) = \frac{2}{\pi}$$

Tämä saattaa auttaa oivaltamaan, että polynomia $x(1+x)(1-x)$ voisi arvioida yläpuolelta vakiolla.



Kuvaajan perusteella tämä vakio olisi sopivasti $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Funktio f on polynomifunktiona derivoituva kaikkialla, joten erityisesti se on derivoituva myös suljetulla välillä $[0, 1]$. Täten funktion f suurin, ja vastaavasti pienin arvo, on joko välin $[0, 1]$ päätepisteissä, tai derivaatan nollakohdissa tällä välillä.

Derivaatan ainoa nollakohta välillä $]0, 1[$ on $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\text{solve}(g(x)=0, x) | 0 < x < 1$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lasketaan funktion arvot erityispisteissä:

Tarkasteluvälillä funktion f pienin arvo on nolla, joten $x(1+x)(1-x) \geq 0$.

Vastaavasti funktion f suurin arvo on

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$f(0)$	0
$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9}$
$f(1)$	0

joten tarkasteluvälillä

$$0 \leq x(1+x)(1-x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Tämä epäyhtälö säilyttää järjestyksen potenssiin $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ korotettaessa, koska lausekkeet ovat epänegatiivisia. Näin epäyhtälö saadaan muotoon

$$0 \leq (x(1+x)(1-x))^n \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \left| \cdot \sin(\pi x) \geq 0 \right.$$

$$0 \leq \sin(\pi x) (x(1+x)(1-x))^n \leq \sin(\pi x) \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n$$

Alkuperäistä integraalia voidaan nyt arvioida vihjettä hyödyntäen yläpuolelta seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(\pi x) (x(1+x)(1-x))^n dx &\leq \int_0^1 \sin(\pi x) \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n dx \\ &= \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen.