

Aineisto

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

Tekstissä 9.A on esitetty pseudokoodilla kirjoitettu algoritmi.

1. Minkä tuloksen algoritmi antaa, kun $a = 0$, $b = 1$ ja $n = 5$? (2 p.)
2. Tee taulukkolaskenta- tai ohjelmointitoteutus algoritmille, kun $a = -1$, $b = 2$ ja $n = 1000$. Minkä tuloksen se tässä tapauksessa antaa? (4 p.)
3. Mitä integraalia algoritmi approksimoi? Selitä muuttujien a , b , n , h , r , k ja f roolit algoritmissa. (6 p.)

1. Kun $n = 5$, niin $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$.

Aluksi muuttuja $r = 0$, mutta siihen lisätään aina lausekkeen $(k \cdot h)^2 + 1$ arvo, kun k käy läpi arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

```
integraali(a,b,n):  
    h = (b-a)/n  
    r = 0  
    toista arvoilla k = 1, 2, ..., n  
        f = (a+k*h)^2 + 1  
        r = r + f*h  
    palauta r
```

Lähde: YTL.

Lisättävät lausekkeen arvot ovat siis

$$\left(1 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1, \quad \left(2 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1, \quad \left(3 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1$$

$$\left(4 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 \quad \text{ja} \quad \left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1.$$

Jokainen arvo kerrotaan ennen lisäystä luvulla $h = \frac{1}{5}$, joten tulokseksi saadaan

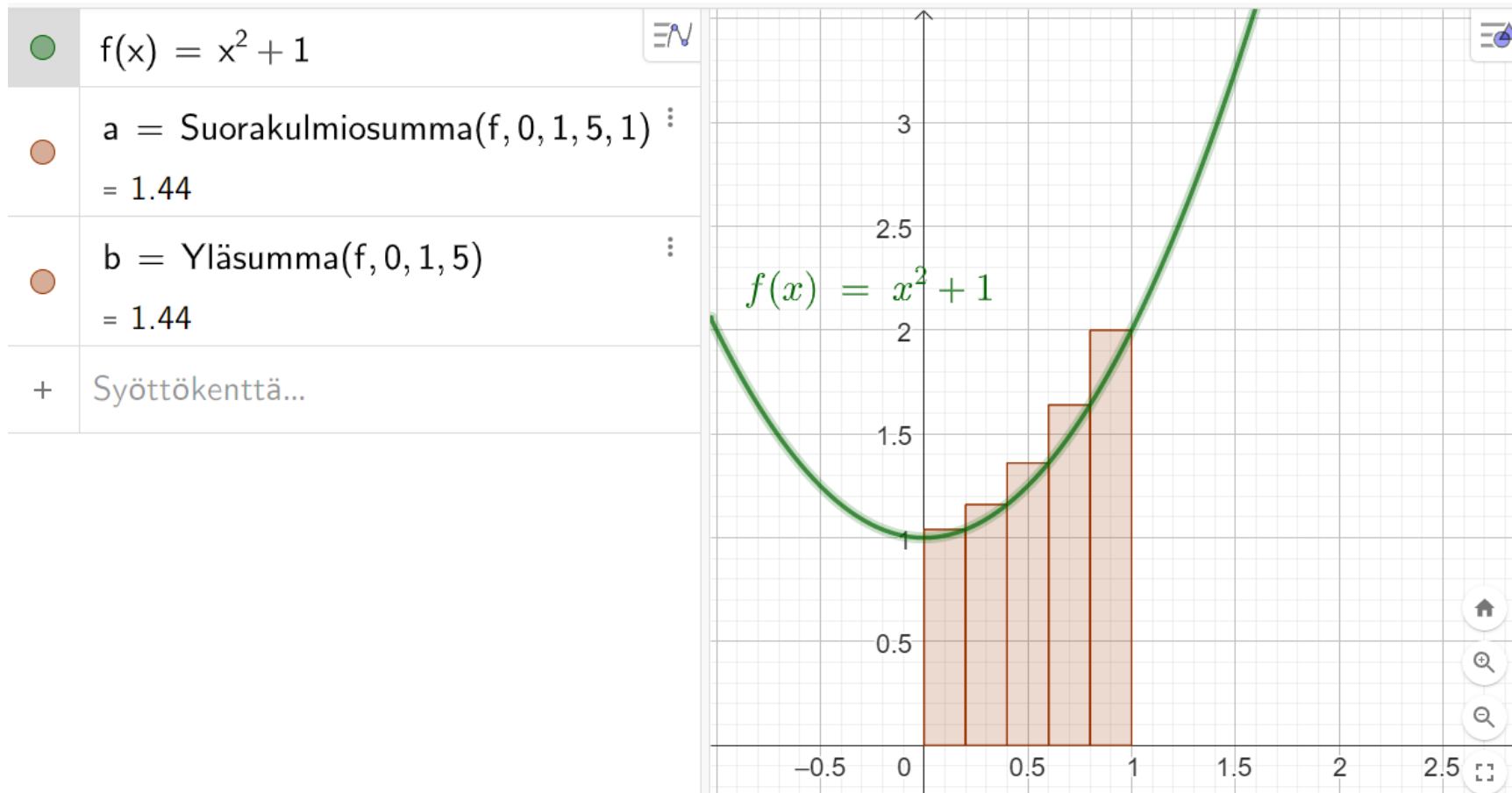
$$\frac{1}{5} \left(\left(1 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 + \left(2 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 + \left(3 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 + \left(4 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 + \left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)^2 + 1 \right) = \frac{180}{125} = 1,44$$

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

```
integraali(a,b,n):  
    h = (b-a)/n  
    r = 0  
    toista arvoilla k = 1, 2, ..., n  
        f = (a+k*h)^2 + 1  
        r = r + f*h  
    palauta r
```

Lähde: YTL.

Lauseke arvioi määrättyä integraalia $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$ viidellä suorakulmiolla, niin että suorakulmion korkeus määritetään aina funktion arvosta pylvään oikeassa reunassa.



Suorakulmiosumman viimeinen parametri kertoo kohdan mistä (funktion arvosta) korkeus määritetään.

Kun parametri on 0: Korkeus määritetään vasemmasta reunasta.

Kun parametri on 0.5: Korkeus määritetään pylvään keskeltä (keskipistesääntö).

Kun parametri on 1: Korkeus määritetään oikeasta reunasta.

Koska funktio $f(x) = x^2 + 1$ on kasvava tällä välillä, niin kyseinen summa on sama kuin yläsumma viidellä osavälillä.

9. Integraalialgoritmi 12 p.

Aineisto

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

Tekstissä 9.A on esitetty pseudokoodilla kirjoitettu algoritmi.

1. Minkä tuloksen algoritmi antaa, kun $a = 0$, $b = 1$ ja $n = 5$? (2 p.)
2. Tee taulukkolaskenta- tai ohjelmointitoteutus algoritmille, kun $a = -1$, $b = 2$ ja $n = 1000$. Minkä tuloksen se tässä tapauksessa antaa? (4 p.)
3. Mitä integraalia algoritmi approksimoi? Selitä muuttujien a , b , n , h , r , k ja f roolit algoritmossa. (6 p.)

2. Taulukoidaan arvoja LibreOffice Calc- taulukkolaskentaohjelmalla.

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

```
integraali(a,b,n):  
    h = (b-a)/n  
    r = 0  
    toista arvoilla k = 1, 2, ..., n  
        f = (a+k*h)^2 + 1  
        r = r + f*h  
    palauta r
```

Lähde: YTL.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	h	0,003	k	f	r	0
4	a	-1		1	1,994009	0,005982027
5	b	2		2	1,988036	0,011946135
6				3	1,982081	0,017892378
7				4	1,976144	0,02382081
8				5	1,970225	0,029731485
9				6	1,964324	0,035624457
10				7	1,958441	0,04149978
11				8	1,952576	0,047357508
12				9	1,946729	0,053197695
13				10	1,9409	0,059020395
14				11	1,935089	0,064825662
15				12	1,929296	0,07061355
16				13	1,923521	0,076384113
17				14	1,917764	0,082137405
18				15	1,912025	0,08787348
19						

Maalataan kaksi ensimmäistä k :n arvoa 1 ja 2, jonka jälkeen täytetään sarakkeeseen D ruudun kulmasta vetämällä indeksin arvot $k = 1, 2, 3, \dots, 1000$.

993	4,916441	5,900258043
994	4,928324	5,915043015
995	4,940225	5,92986369
996	4,952144	5,944720122
997	4,964081	5,959612365
998	4,976036	5,974540473
999	4,988009	5,9895045
1000	5	6,0045045

Solussa B3 on laskettu h :n arvo.
Myöskin solun on nimeksi on asetettu h .

Solussa E5 on laskukaava " $(-1+D5*h)^2+1$ "

Sarakkeessa E lasketaan siis arvoja $(a + kh)^2 + 1$, kun $k = 1, 2, 3, \dots, 1000$.

Täytetään laskukaava kaikille indeksin k arvoille.

Solussa F5 on laskukaava " $F4+E5*h$ ".

Sarakkeessa F lisätään siis aina edelliseen (muuttujan r) arvoon vastaava sarakkeen E arvo kerrottuna h :lla.

(Tämä lisäys voidaan tulkita suorakulmion pinta-alaksi.)

Viimeinen sarakkeen F arvo on määrätyn integraalin arvo eli kaikkien "pylväiden" pinta-alojen summa (koska pylväiden korkeudet ovat aina positiivisia).

Vastaus: Algoritmi antaa tuloksen 6,005.

Tekstissä 9.A on esitetty pseudokoodilla kirjoitettu algoritmi.

1. Minkä tuloksen algoritmi antaa, kun $a = 0$, $b = 1$ ja $n = 5$? (2 p.)
2. Tee taulukkolaskenta- tai ohjelmointitoteutus algoritmille, kun $a = -1$, $b = 2$ ja $n = 1000$. Minkä tuloksen se tässä tapauksessa antaa? (4 p.)
3. Mitä integraalia algoritmi approksimoi? Selitä muuttujien a , b , n , h , r , k ja f roolit algoritmissa. (6 p.)

3. Algoritmi arvioi määrättyä integraalia $\int_a^b (x^2 + 1)dx$ suorakulmioiden pinta-alojen avulla. Osatehtävässä 9.2 integraali on $\int_{-1}^2 (x^2 + 1)dx$.

Yleisesti a on integroimisvälin alkupiste ja b loppupiste.

Muuttuja n on osavälien (eli suorakulmioiden määrä ja h osavälin pituus (eli suorakulmion leveys).

Muuttuja r on osasumman arvo. Tähän muuttujaan lisätään jokaisella indeksin k arvolla vastaavan suorakulmion pinta-ala.

Muuttuja k on laskurin (indeksin) arvo, joka kertoo kuinka monetta suorakulmiota algoritmi käsittelee. Laskuri käy läpi arvot $1, 2, 3, \dots, n$.

Muuttuja f antaa integroitavan funktion $f(x) = x^2 + 1$ arvon eli suorakulmion korkeuden eri indeksin k arvoilla.

9.A Teksti: Integraali-pseudokoodi

```
integraali(a,b,n):  
    h = (b-a)/n  
    r = 0  
    toista arvoilla k = 1, 2, ..., n  
        f = (a+k*h)^2 + 1  
        r = r + f*h  
    palauta r
```

Lähde: YTL.

Huom!

Algoritmi arvioi määrättyä integraalia siten, että suorakulmion korkeus määritetään aina osavälin oikeasta reunasta. Siksi algoritmin tuloksen voi laskea suorakulmiosummalla, kun viimeiseksi parametriksi laitetaan 1.

Tämä ei ole ylä- tai alasumma, koska tarkasteluvälillä funktio $f(x) = x^2 + 1$ ei ole kasvava tai vähenevä.

