

## Yo-tehtävä K2023/6

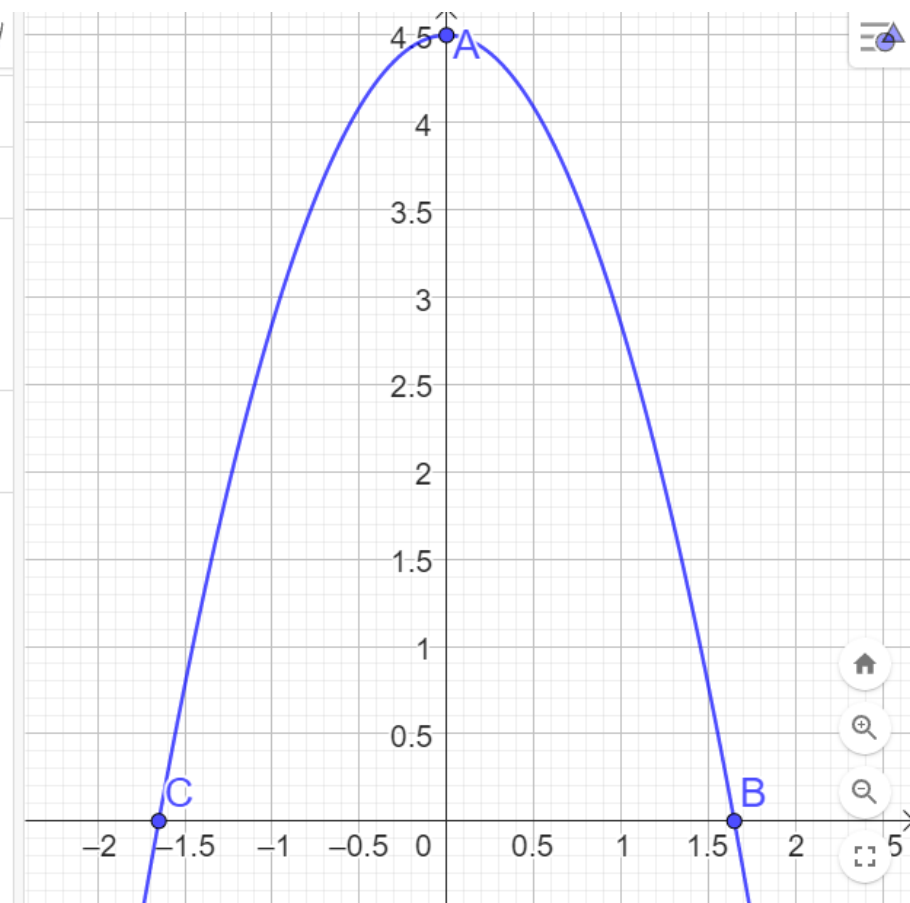
### 6. Raketin nokkakartio 12 p.

Erään raketin kärki, eli niin sanottu nokkakartio, saadaan, kun alaspäin aukeava paraabeli pyörähtää symmetria-akselinsa ympäri. Kärjen korkeus on 4,5 metriä, ja sen halkaisija pohjan tasolla on 3,3 metriä. Määritä kärjen tilavuus.

Mallinnetaan tilannetta ensin GeoGebralla.

●	$A = (0, 4.5)$	☰
●	$B = (1.65, 0)$	⋮
●	$C = (-1.65, 0)$	⋮
●	$h(x) = \text{SovitaPolynomi}(\{A, B, C\})$ $= -1.65289 x^2 + 4.5$	⋮
+	Syöttökenttä...	

Muista, että sovitustoiminto on likimääräinen menetelmä. Tässä tehtävässä likiarvoihin perustuva ratkaisu olisi todennäköisesti ok, mutta lasku on siistimpi tehdä tarkoilla arvoilla. (Jos käytät likiarvoja, vaihda pyöristystarkkuus suuremmaksi.)



Sijoitetaan paraabelin huippu  $y$  – akselille, jolloin symmetria-akseli on myös  $y$  – akseli.

Paraabelin yhtälö on nyt muotoa  $y = f(x) = ax^2 + h$ .

Koska vakiotermi on samalla nokkakartion korkeus, tiedetään että

$$h = 4,5 = \frac{9}{2} \text{ (m)}.$$

Paraabeli leikkaa  $x$  – akselin kohdassa

$$x = \frac{3,3}{2} = 1,65 = \frac{165}{100}.$$

”Muotokerroin”  $a$  voidaan ratkaista tiedosta  $f\left(\frac{165}{100}\right) = 0$ .

$$f(x) := a \cdot x^2 + \frac{9}{2}$$

*Valmis*

$$\text{solve}\left(f\left(\frac{165}{100}\right) = 0, a\right)$$

$$a = \frac{-200}{121}$$

Tulokseksi saadaan  $a = -\frac{200}{121}$ .

Käytetään murtolukumuotoja tarkkojen arvojen saamiseksi.

Huomaa, että desimaalimuodossa vastaus olisi likiarvo.

Muista verrata GeoGebran likiarvoon (ja/tai) kuvaajaan tarkistuksena.

Koska paraabeli pyörähtää  $y$  – akselin ympäri, muokataan seuraavaksi paraabelin yhtälö muotoon  $x = g(y)$  ratkaisemalla  $x$  yhtälöstä  $y = f(x) = -\frac{200}{121}x^2 + \frac{9}{2}$ .

$$a := \frac{-200}{121}$$

$$\frac{-200}{121}$$

`solve(y=f(x),x)`

$$x = \frac{11 \cdot \sqrt{9 - 2 \cdot y}}{20} \text{ and } 2 \cdot y - 9 \leq 0 \text{ or } x = \frac{-11 \cdot \sqrt{9 - 2 \cdot y}}{20} \text{ and } 2 \cdot y - 9 \leq 0$$

Saadaan kaksi yhtälöä, joista positiivisella etumerkillä oleva kuvaa sitä käyrän osaa, joka on  $y$  – akselin oikealla puolella.

Pyörähtävänä käyränä riittää käsitellä jompaa kumpaa näistä. Valitaan oikeanpuoleinen osa

$$g(y) = \frac{11\sqrt{9 - 2y}}{20}.$$

**Määrittelyehto**

$$9 - 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{9}{2}$$

on selvä myös kuvan perusteella.

Integroimisväli on  $y$  – suunnassa  $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ .

Nokkakartion tilavuus  $V$  saadaan pyörähdyskappaleena integraalilaskennalla. Tilavuusyksikkönä on kuutiometri.

$$V = \pi \int_0^{\frac{9}{2}} g(y) dy$$

$$g(y) := \frac{11 \cdot \sqrt{9 - 2 \cdot y}}{20}$$

*Valmis*

$$\pi \cdot \int_0^{\frac{9}{2}} (g(y))^2 dy$$

$$\frac{9801 \cdot \pi}{1600}$$

$$\pi \cdot \int_0^{\frac{9}{2}} (g(y))^2 dy$$

19.2442184986

Vastaus: Nokkakartion tilavuus on  $\frac{9801}{1600} \pi \approx 19,2 \text{ m}^3$ .

Huom!

Tehtävän olisi voinut ratkaista myös helposti pyörähdysparaboloidin tilavuuden kaavalla. (Tämä jäi luultavasti tehtävän laatijoilta huomaamatta, koska tehtävänannossa ei vaadittu integraalilaskennan hyödyntämistä.)

$$r := \frac{3.3 \cdot \text{m}}{2}$$

$$1.65 \cdot \text{m}$$

$$h := 4.5 \cdot \text{m}$$

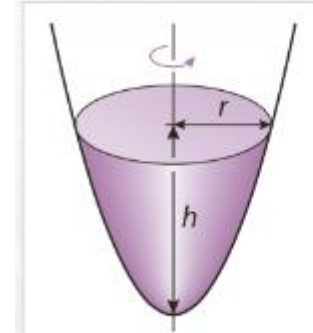
$$4.5 \cdot \text{m}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$19.2442184986 \cdot \text{m}^3$$

Tehtävänä voisi olla myös kyseisen kaavaan todistaminen.

### Pyörähdysparaboloidi



$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

Todistetaan pyörähdysparaboloidin tilavuuden kaava  $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$ .

Asetetaan paraabeli koordinaatistoon vastaavalla tavalla kuin yotehtävässä, mutta käytetään laskuissa mitattujen lukuarvojen sijaan kirjaimia.

Paraabelin yhtälö on muotoa  $y = f(x) = ax^2 + h$ .

Ratkaistaan kerroin  $a$  (korkeuden  $h$  ja säteen  $r$  lausekkeena) ehdosta  $f(r) = 0$ .

$$f(x) := a \cdot x^2 + h$$

$$\text{solve}(f(r)=0, a)$$

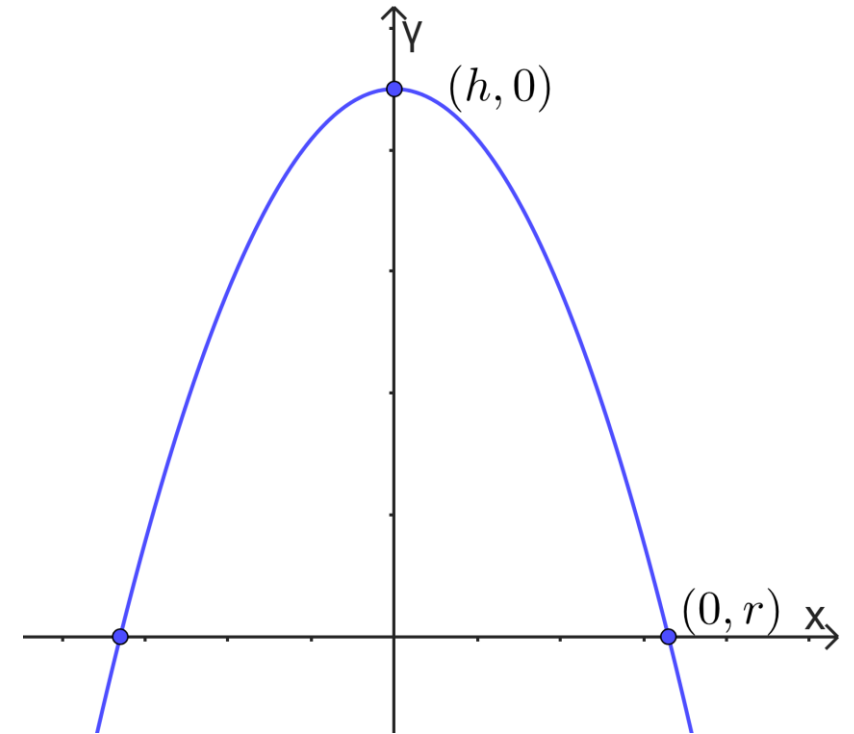
$$a := \frac{-h}{r^2}$$

Valmis

$$a = \frac{-h}{r^2}$$

$$\frac{-h}{r^2}$$

Tulokseksi saadaan  $a = -\frac{h}{r^2}$ .



Ratkaistaan seuraavaksi paraabelin yhtälö muodossa  $x = g(y)$  yhtälöstä  $y = f(x) = -\frac{h}{r^2}x^2 + h$ .

$$\text{solve}(y=f(x),x) \quad x=-r \cdot \sqrt{\frac{-(y-h)}{h}} \text{ and } \frac{r^2 \cdot (y-h)}{h} \leq 0 \text{ or } x=r \cdot \sqrt{\frac{-(y-h)}{h}} \text{ and } \frac{r^2 \cdot (y-h)}{h} \leq 0$$

Määritelty, kun  $y - h \leq 0 \Leftrightarrow y \leq h$  (ja  $h > 0$ ). Nämä ehdot ovat selvästi tilanteessa voimassa.

Lausekkeet kuvaavat paraabelin  $y$  -akselin vasemman- ja oikeanpuoleisia osia. Valitaan oikeanpuoleinen osa pyörähtäväksi käyräksi (alla hieman sievennetyssä muodossa).

$$g(y) = r \sqrt{\frac{h-y}{h}}$$

$$g(y) := r \cdot \sqrt{\frac{-(y-h)}{h}}$$

*Valmis*

Integroimisväli on  $y$  -suunnassa  $[0, h]$ . Lasketaan laskinohjelmalla pyörähdyskappaleen tilavuuden kaavalla:

Tulokseksi saadaan pyörähdysparaboloidin tilavuuden kaava.

$$V = \pi \int_0^h g(y)^2 dy = \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

$$\pi \cdot \int_0^h (g(y))^2 dy$$

$$\frac{h \cdot \pi \cdot r^2}{2}$$

Integraalin laskeminen ilman apuvälineitä malliksi:

$$V = \pi \int_0^h \left( r \sqrt{\frac{h-y}{h}} \right)^2 dy = \pi \int_0^h r^2 \frac{h-y}{h} dy = \frac{\pi r^2}{h} \int_0^h (h-y) dy = \frac{\pi r^2}{h} \left( hy - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^h$$
$$= \frac{\pi r^2}{h} \left( h^2 - \frac{1}{2} h^2 \right) = \frac{\pi r^2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 = \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

Integraalin eteen saa siirtää vakiokertoimia (myös kirjaimella merkittyjä parametreja), mutta ei muuttujakirjainta (tässä  $y$ ).