

3. Pinta-alan ääriarvo 12 p.

1. Laske integraali $\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$. (3 p.)

2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ kuvaajan ja x -akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t + \frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? (9 p.)

1.

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^2 \\ &= -\frac{2}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) \\ &= -\frac{2}{\pi} (-1 - 1) = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Koska ulkofunktion $\sin x$ integraali on $-\cos x$ ja sisäfunktio $\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ei muutu integroitaessa, niin tiedetään että integraalifunktio on muotoa $-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Kerroin voidaan päätellä derivoimalla:

$$D\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Kerroin $\frac{\pi}{2}$ kumoutuu käänteisluvulla $\frac{2}{\pi}$.

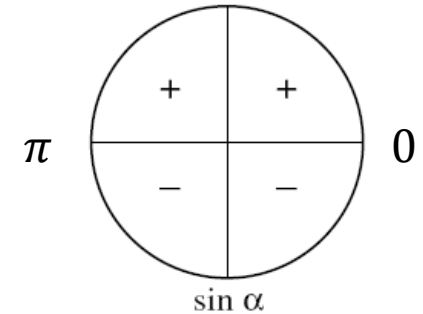
2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ kuvaajan ja x -akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t + \frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? (9 p.)

2. Kun $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$, niin väli $\left[t, t + \frac{1}{2}\right]$ sisältyy väliin $[0, 2]$. Tällä välillä $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ on positiivinen.

Kaistaleen pinta-ala saadaan määrittäystä integraalista:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= -\frac{2}{\pi} \Bigg|_t^{t+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -\frac{2}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Merkitään $A(t) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ ja määritetään pinta-alafunktion A suurin arvo suljetulla välillä $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ derivaatan avulla.



$$A(t) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A'(t) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Funktion A suurin arvo suljetulla välillä $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ on joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

$$A'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Koska $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$, niin sekä $\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}$, että $\frac{\pi}{2}t$ ovat välillä $[0, \pi]$.

Sinin symmetrian perusteella sinifunktiot saavat samat arvot välillä $[0, \pi]$, jos ja vain jos

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}t$$

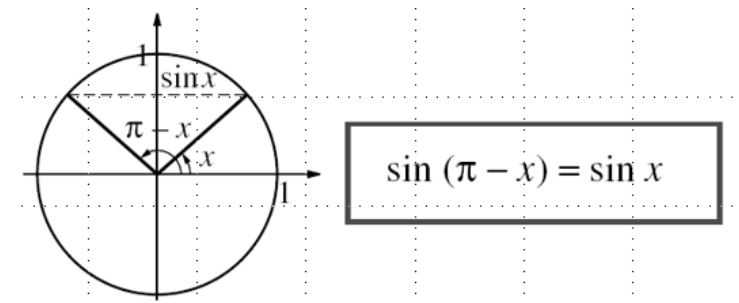
$$\frac{\pi}{4} = 0$$

tai

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2}t$$

$$\pi t = \frac{3}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{4}$$

Ei ratkaisua.



Lasketaan vielä funktion A arvot kohdissa $t = 0$, $t = \frac{3}{4}$ ja $t = \frac{3}{2}$.

$$A(t) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A(t) = 2/\pi * \cos(\pi/2 * t) - 2/\pi * \cos(\pi/2 * t + \pi/4)$$

$$A(0) \approx 0,186 \quad (\text{SpeedCrunch})$$

$$A(0) \\ = 0,186461614289028$$

$$A\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0,487$$

$$A(3/4) \\ = 0,487247679202216$$

$$A\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,186$$

$$A(3/2) \\ = 0,186461614289028$$

Pinta-alan suurin arvo saavutetaan, kun $t = \frac{3}{4}$.

Huom! Parametrin t arvon voi päätellä myös sinifunktion huipun ja symmetrian perusteella.