Yo-koe K2020:

3. Pinta-alan ääriarvo 12 p.

1. Laske integraali $\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx$. **(3 p.)**
2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ kuvaajan ja x-akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t + \frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? **(9 p.)**

1.

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$= -\frac{2}{\pi} \Big/_{0}^{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi}$$

Muodostetaan integraalifunktio ”ehdokastekniikalla”.

Koska ulkofunktion $\sin x$ integraali on $-\cos x$ ja sisäfunktio $\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ei muutu integroitaessa, niin tiedetään että integraalifunktio on muotoa $-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

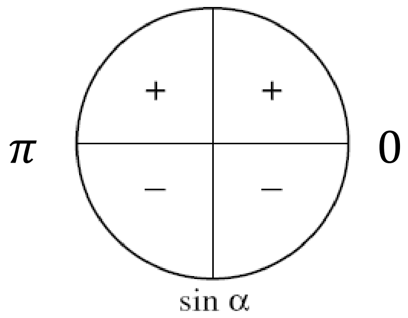
Kerroin voidaan päätellä derivoimalla:

$$D\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Kerroin $\frac{\pi}{2}$ kumoutuu käänteisluvulla $\frac{2}{\pi}$.

2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ kuvaajan ja x-akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t + \frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? **(9 p.)**

2. Kun $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$, niin väli $\left[t, t + \frac{1}{2}\right]$ sisältyy väliin $[0, 2]$. Tällä välillä $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ on positiivinen.



Kaistaleen pinta-ala saadaan määrätystä integraalista:

$$\int_t^{t+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} \Big/_{t}^{t+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -\frac{2}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Merkitään $A(t) = \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ ja määritetään pinta-alafunktion A suurin arvo suljetulla välillä $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ derivaatan avulla.

$$A(t) = \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A'(t) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Derivoituvan funktion A suurin arvo suljetulla välillä $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ on joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

$$A'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Koska $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$, niin sekä $\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}$, että $\frac{\pi}{2}t$ ovat välillä $[0, \pi]$.

Sinin symmetrian perusteella sinifunktiot saavat samat arvot välillä $[0, \pi]$, jos ja vain jos

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}t$$

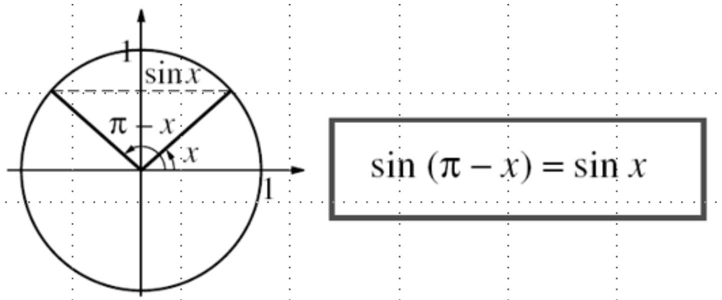
$$\frac{\pi}{4} = 0$$

Ei ratkaisua.

tai

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2}t$$

$$\pi t = \frac{3}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3}{4}$$



Lasketaan vielä funktion A arvot kohdissa $t = 0, t = \frac{3}{4}$ ja $t = \frac{3}{2}$.

$$A(t) = \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$A(0) \approx 0{,}186$ (Laskin)

$$A\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0{,}487$$

$$A\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}186$$

Pinta-alan suurin arvo saavutetaan, kun $t = \frac{3}{4}$.

Huom! Parametrin t arvon voi päätellä myös sinifunktion huipun ja symmetrian perusteella.