Rationaalifunktion ääriarvot

- Rationaalifunktion merkki voi vaihtua funktion nollakohtien (eli osoittajan nollakohtien) lisäksi myös nimittäjän nollakohdissa eli kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.
- Kulkukaavioon merkitään siis
  - Osoittajan nollakohdat
  - Mahdolliset nimittäjän nollakohdat
  - Tarkasteltavan välin päätepisteet, jos mahdollista
- Derivaatan merkki voidaan päätellä testipisteillä tai osoittajan ja nimittäjän lausekkeista päättelemällä

t. 447, s. 127

a) Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$, $x \neq 1$ kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - 1 \cdot (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

Osoittajan nollakohdiksi saadaan (toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla) $x = -1$ ja $x = 3$. Siis $f'(x) = 0$, kun $x = -1$ tai $x = 3$.

Nimittäjän nollakohta on $x = 1$. Muualla nimittäjä on aina positiivinen.

Laaditaan kulkukaavio:

		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	*ei*	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	*ei*	$\searrow$	min	$\nearrow$

Huom! Osoittajan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja nimittäjä on positiivinen, kun $x \neq 1$. Derivaatan merkin (nollakohtien välissä negatiivinen) voisi päätellä siis ilman testipisteitäkin.

Testipisteet (SpeedCrunch):

g(x)=(x^2-2x-3)/(x-1)^2

g(-2)
= 0,5555555555555555556

g(0)
= -3

g(2)
= -3

g(4)
= 0,5555555555555555556

Kulkukaavion perusteella f on aidosti vähenevä väleillä $[-1, 1[$ ja $]1, 3]$ ja aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -1]$ ja $[1, \infty[$.

		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ei	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	ei	$\searrow$	min	$\nearrow$

b) Kulkukaavion perusteella funktiolla f on paikallinen maksimi $f(-1) = -2$ ja minimi $f(3) = 6$.

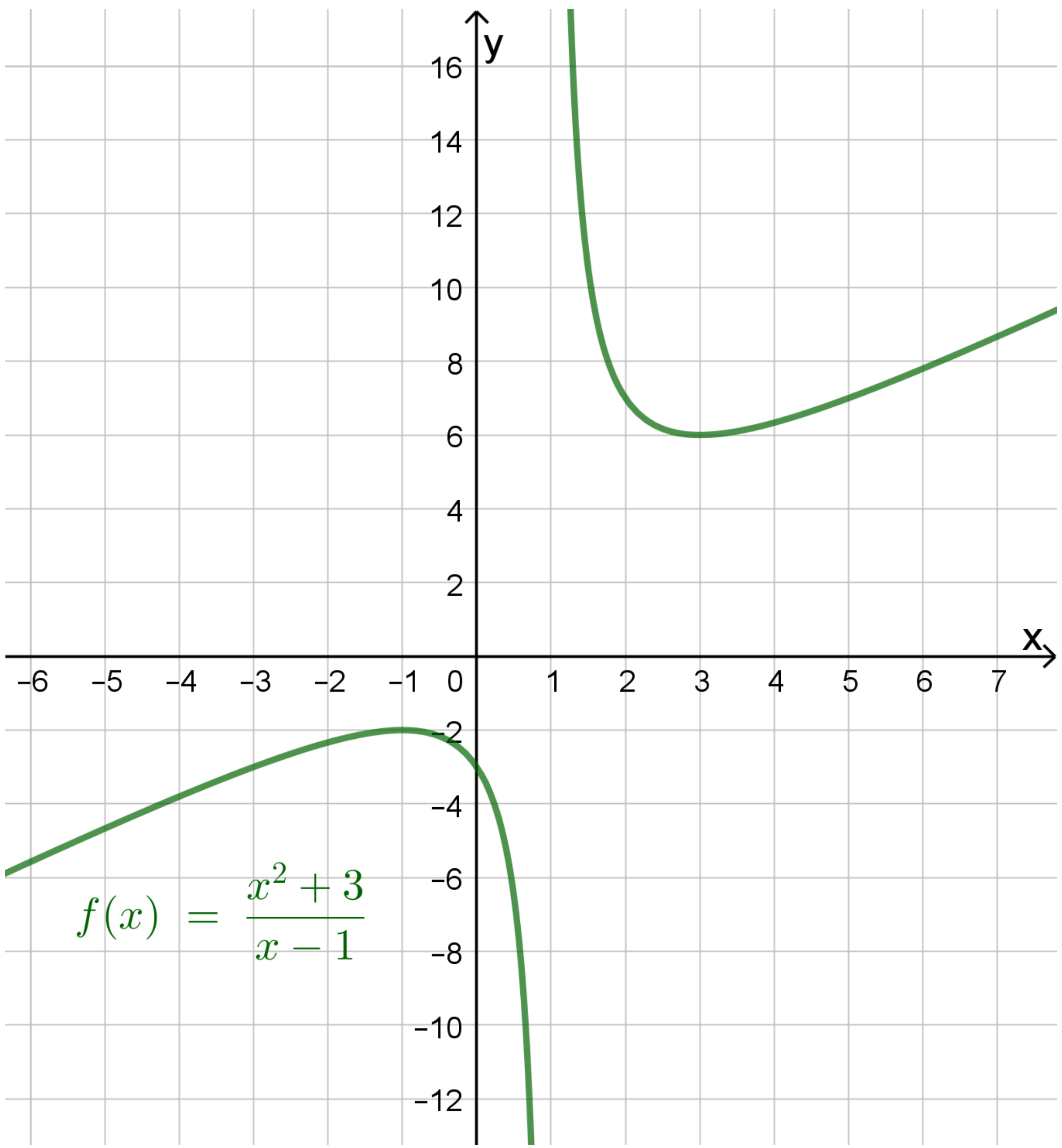
f(x)=(x^2+3)/(x-1)

f(-1)
= -2

f(3)
= 6

Välillä $[2, 4]$ paikallinen minimi $f(3) = 6$ on funktion pienin arvo.

Funktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa, koska nimittäjän nollakohdan läheisyydessä $f(x) \to \infty$ (oikealta) tai $f(x) \to -\infty$ (vasemmalta)


y
x
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$