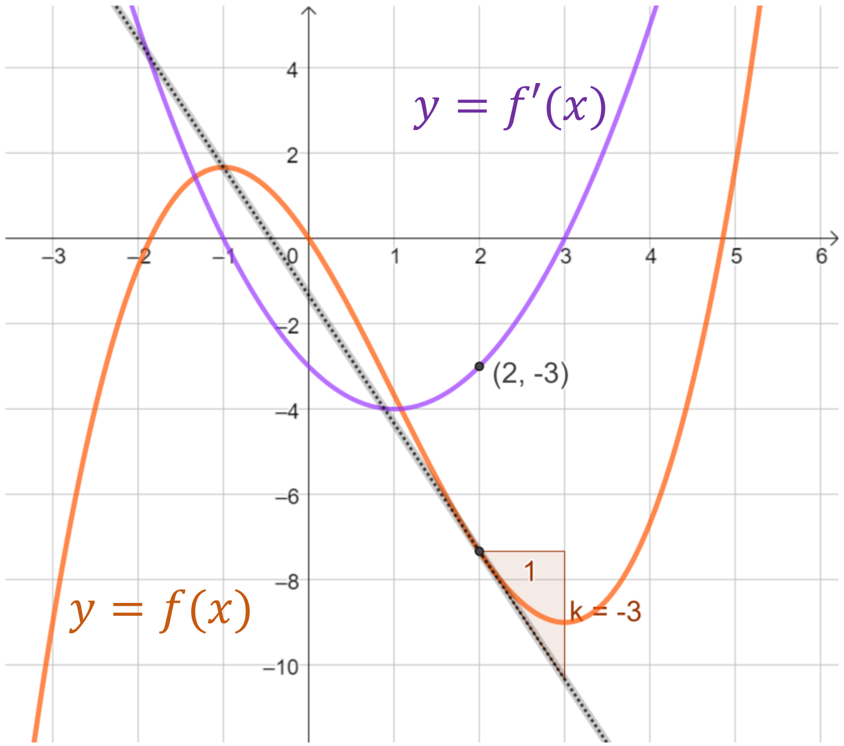
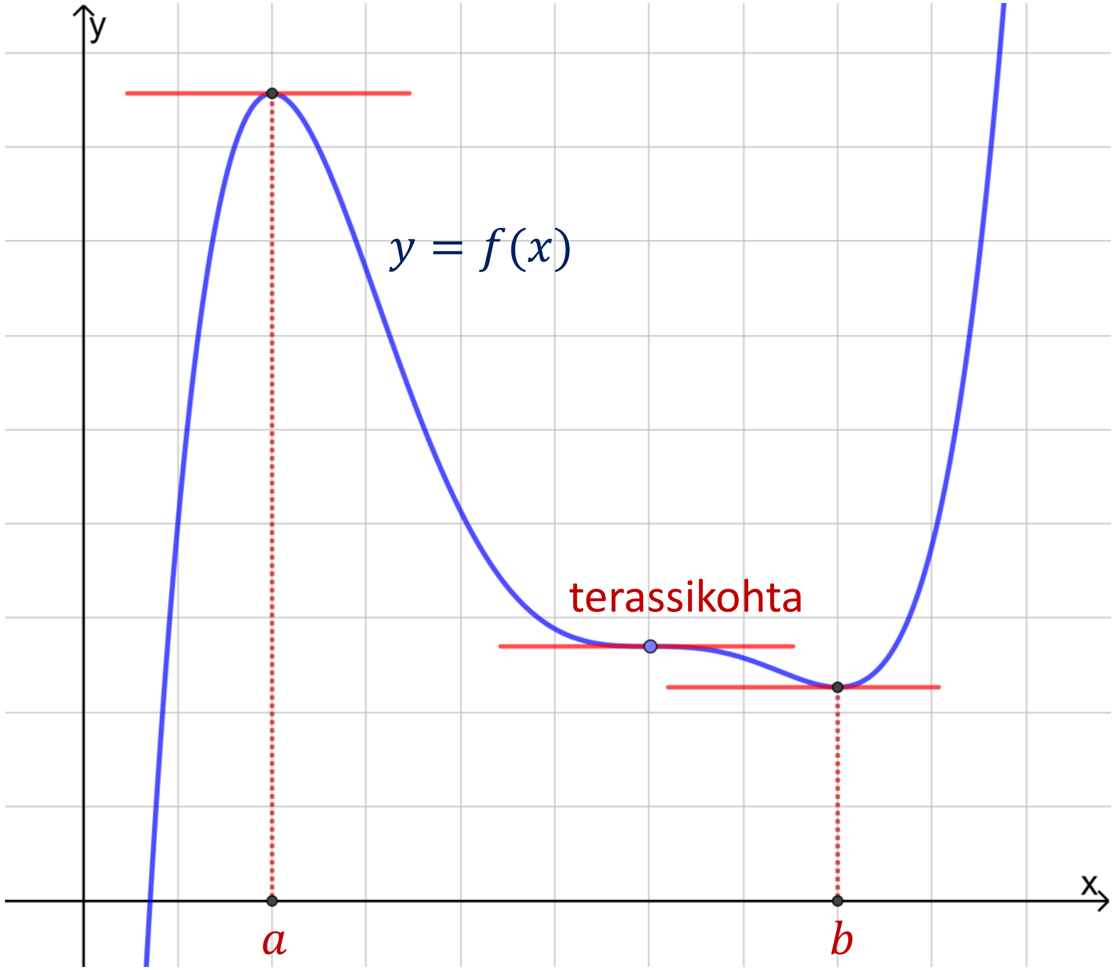
# Polynomifunktion kasvaminen ja väheneminen

- (Polynomi)funktion $f$ kulkua voidaan tutkia sen derivaattafunktion $f$' avulla.
- Derivaattafunktion arvoista $f'(x)$ voidaan päätellä millä väleillä funktio $f$ on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä
- Kuvan esimerkissä derivaattafunktio saa negatiivisia arvoja (on $x$ −akselin alapuolella) välillä $]-1, 3[$. Tällöin funktio $f$ on aidosti vähenevä suljetulla välillä $[-1, 3]$.
- Vastaavasti derivaatta saa positiivisia arvoja, kun $x < -1$ tai $x > 3$, jolloin $f$ on aidosti kasvava, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 3$.




Huomaa, että välin päätepisteet kuuluvat mukaan alueisiin, joissa funktio on aidosti kasvava tai vähenevä.

- Päättely voidaan yleistää kaikille derivoituville funktiolle $f$:
- Jos $f'(x) > 0$ tietyllä välillä lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia (ns. *terassikohtia*), joissa $f'(x) = 0$, niin $f$ on aidosti kasvava tällä välillä.
- Jos $f'(x) < 0$ tietyllä välillä lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia, joissa $f'(x) = 0$, niin $f$ on aidosti vähenevä tällä välillä.
- Jos $f'(x) = 0$ tietyllä välillä, niin $f(x)$ on vakio tällä välillä.




Funktio $f$ on aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

- Funktion kulkua voidaan havainnollistaa *kulkukaavion* avulla.
- Kulkukaavioon tulee derivaattafunktion $f'$ merkit ja funktion $f$ kulkusuunnat (ks. oppikirja s. 85)
- Derivaattafunktion merkkiä varten pitää ensin selvittää derivaatan nollakohdat
- Polynomifunktio ei voi vaihtaa merkkiään muualla kuin nollakohdissaan, joten nollakohtien välillä merkki on aina sama. Tämä voidaan usein päätellä derivaattafunktion muodosta tai selvittää *testipisteellä* eli testaamalla jollakin välin pisteellä, minkä merkin derivaattafunktio saa kyseisellä välillä.

**t. 312, s. 90**

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan funktio $h(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 2$.

$h'(x) = 6x^5 - 10x^4 - 4x^3$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat (eli yhtälö $h'(x) = 0$)

$h'(x) = 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow 2x^3(3x^2 - 5x - 2) = 0$

Tulon nollasäännön perusteella $2x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $3x^2 - 5x - 2 = 0$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -\frac{1}{3}, x = 0$ ja $x = 2$.

Laaditaan kulkukaavio. Testataan derivaatan merkit eri alueissa testipisteillä

| | (−1) | $-\frac{1}{3}$ | (−0,1) | $0$ | (1) | $2$ | (3) | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | - | | + | | - | | + | |
| $h(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Kokeen A-osassa apuna kannattaa käyttää editorin taulukkoa (array).

| | | $-\frac{1}{3}$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $h(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Kulkukaavion perusteella funktio $h$ on aidosti vähenevä, kun $x \leq -\frac{1}{3}$ tai $0 \leq x \leq 2$ ja aidosti kasvava, kun $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ tai $x \geq 2$.

SpeedCrunch:

g(x)=6x^5-10x^4-4x^3

g(-1)
= -12

g(-0.1)
= 0,00294

g(1)
= -8

g(3)
= 540