

Kertaustehtävä K22, s.221 (+ vinkkejä tarkistamiseen A-osassa)

Tutkitaan funktion $f(x) = x^5 - 20x^2$ kulkua ensin koko reaalilukujoukossa \mathbb{R} derivaatan f' avulla:

$$f'(x) = 5x^4 - 40x$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat eli yhtälö $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 5x^4 - 40x = 0$$

$$5x(x^3 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x = 0 \text{ tai } x^3 - 8 = 0 \quad \text{tulon nollasäännön perusteella}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tai} \quad x^3 = 8 \quad \left| \sqrt[3]{}$$
$$x = 2$$

Laaditaan kulkukaavio (testipisteiden avulla).

		0		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow

SpeedCrunch:

$$g(x) = 5x^4 - 40x \quad \begin{array}{l} g(-1) \\ = 45 \end{array} \quad \begin{array}{l} g(1) \\ = -35 \end{array} \quad \begin{array}{l} g(3) \\ = 285 \end{array}$$

Tarkista myös derivaatan nollakohdat:

$$\begin{array}{l} g(0) \\ = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} g(2) \\ = 0 \end{array}$$

Lasketaan funktion ääriarvot sijoittamalla ääriarvokohtat kulkukaaviosta *alkuperäisen funktion* lausekkeeseen:

		0		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$f(x) = x^5 - 20x^2$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = -48$$

Funktiolla f on paikallinen maksimi $f(0) = 0$ ja paikallinen minimi $f(2) = -48$.

Funktiolla f ei ole suurinta tai pienintä arvoa joukossa \mathbb{R} , koska $f(x) \rightarrow \infty$, kun $x \rightarrow \infty$ ja $f(x) \rightarrow -\infty$, kun $x \rightarrow -\infty$. (Polynomifunktiot kasvaa tai vähenee rajatta.)

Kannattaa varmistaa ääriarvojen laatu sijoittamalla alkuperäiseen funktioon x :n arvoja ääriarvokohtien läheltä:

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = -48$$

Funktion arvot ovat paikallisen maksimin molemmin puolin pienempiä kuin maksimiarvo $f(0) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0.01) = -0,001\,999\,999\,9 \\ f(-0.01) = -0,002\,000\,000\,1 \end{array} \right.$$

Funktion arvot ovat paikallisen minimin molemmin puolin suurempia kuin minimiarvo $f(2) = -48$.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(2.01) = -47,993\,959\,899\,9 \\ f(1.99) = -47,994\,039\,900\,1 \end{array} \right.$$

Rajataan kulkukaavio suljetulle välille $[-1, 3]$.

	-1		0		2		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	min	↗	max	↘	min	↗	max

Huomaa, että suljetun välin
päätepisteessä on ääriarvokohta.

Kulkukaavion perusteella suurin arvo välillä $[-1, 3]$ on joko $f(0)$ tai $f(3)$.

Vastaavasti funktion pienin arvo välillä $[-1, 3]$ on joko $f(-1)$ tai $f(2)$.

Laskemalla arvot huomataan, että suurin arvo välillä $[-1, 3]$ on $f(3) = 63$ ja pienin arvo $f(2) = -48$.

Paikalliset minimi:

$$\begin{aligned} f(-1) \\ = -21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) \\ = -48 \end{aligned} \quad \text{Pienin arvo}$$

Paikalliset maksimit:

$$\begin{aligned} f(0) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) \\ = 63 \end{aligned} \quad \text{Suurin arvo}$$