Funktion potenssin derivaatta

- Derivoituvan funktion potenssi voidaan derivoida kaavalla

$$\boxed{Df(x)^n = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)}$$

Kaava on erikoistapaus yhdistetyn funktion derivoimiskaavasta $Du\big(s(x)\big) = u'\big(s(x)\big)s'(x)$, joka esitetään kappaleessa 5.2. Tässä $f(x)$ on ns. *sisäfunktio* ($s(x)$) ja *ulkofunktiona* on $u(x) = x^n$.

- Esimerkkejä:

a) $D(5x-1)^4 = 4(5x-1)^3 \cdot D(5x-1) = 4(5x-1)^3 \cdot 5 = 20(5x-1)^3$

b) $D(1-x)^3 = 3(1-x)^2 \cdot D(1-x) = 3(1-x)^2 \cdot (-1) = -3(1-x)^2$

c) $D(x^3+6)^5 = 5(x^3+6)^4 \cdot D(x^3+6) = 5(x^3+6)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2(x^3+6)^4$

Huomaa, että sulkujen sisään jäävä lauseke (sisäfunktio) ei muutu!

t. 479, s. 139

Tutkitaan funktion $f(x) = x^2(6-x)^4$ kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = 2x(6-x)^4 + x^2 D(6-x)^4$$

(Tulon derivaatta: $Dfg = f'g + g'f$)

$$f'(x) = 2x(6-x)^4 + x^2 \cdot 4(6-x)^3 \cdot (-1)$$

$$f'(x) = 2x(6-x)^4 - 4x^2(6-x)^3$$

$$f'(x) = 2x[(6-x)^4 - 2x(6-x)^3]$$

$$f'(x) = 2x(6-x)^3[(6-x) - 2x]$$

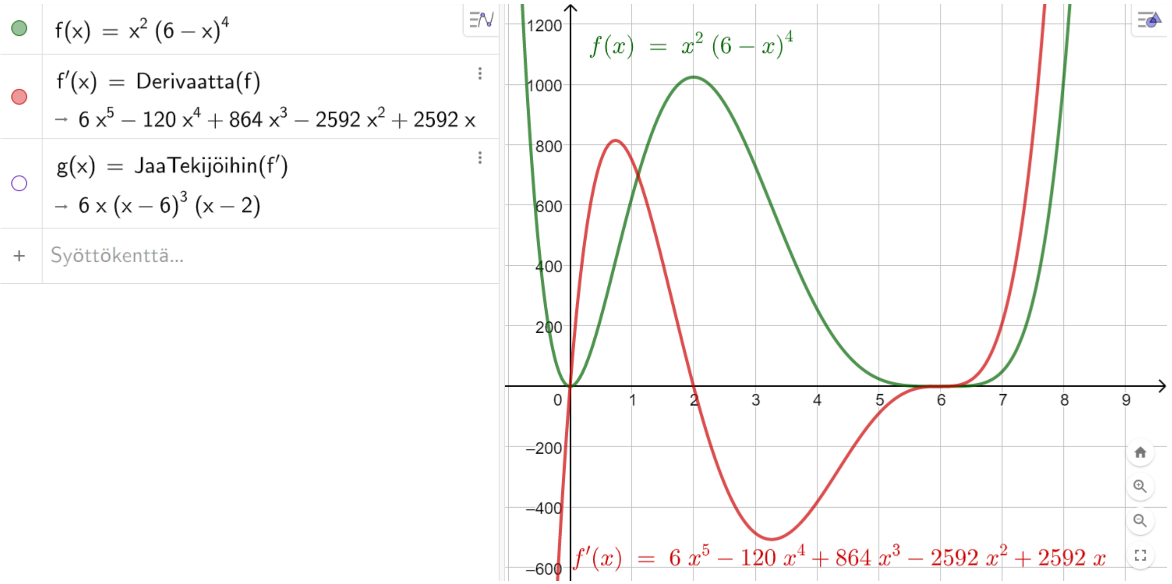
$$f'(x) = 2x(6-x)^3(6-3x)$$

$$f'(x) = 6x(6-x)^3(2-x)$$

TI-Nspire:

$f(x):=x^2\cdot(6-x)^4$	*Valmis*
$g(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Valmis*
$g(x)$	$6\cdot x\cdot(x-6)^3\cdot(x-2)$

GeoGebra:



Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 6x(6-x)^3(2-x) = 0$.

Tulon nollasäännön perusteella:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 0 \text{ tai } 6 - x = 0 \text{ tai } 2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = 6 \text{ tai } x = 2$$

Laaditaan kulkukaavio:

		0		2		6	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Testipisteet (SpeedCrunch):

g(x)=6x*(6-x)^3*(2-x)

g(-1)
= -6174

g(1)
= 750

g(3)
= -486

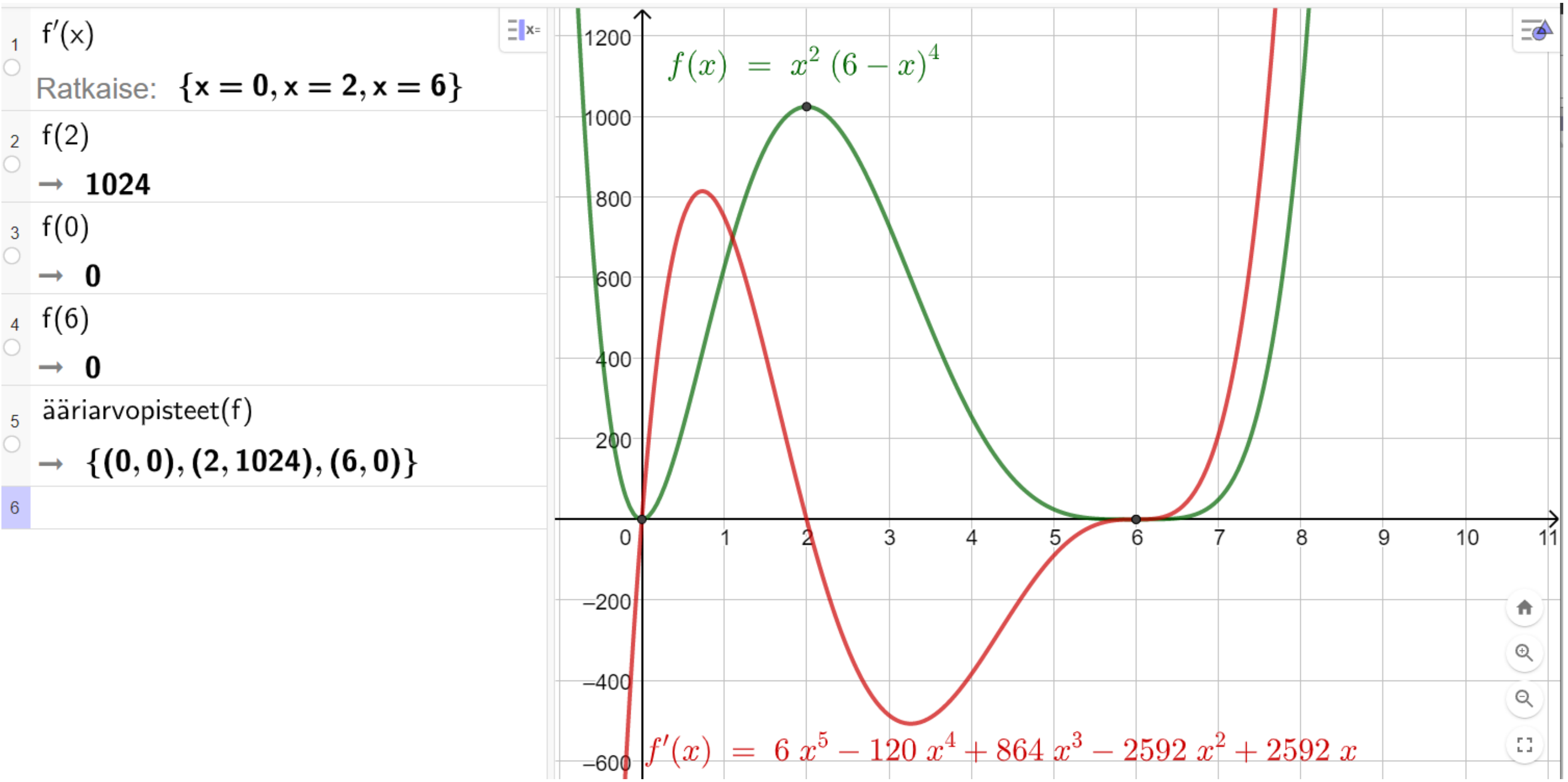
g(7)
= 210

Kulkukaavion perusteella funktio f on kasvava väleillä $0 \leq x \leq 2$ ja $x \geq 6$ ja vähenevä väleillä $x \leq 0$ ja $2 \leq x \leq 6$.

		0		2		6	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Funktion paikallinen maksimiarvo on $f(2) = 2^2(6-2)^4 = 1024$ ja minimiarvot ovat $f(0) = 0$ ja $f(6) = 0$.

Funktiolla on pienin arvo 0, mutta ei suurinta arvoa, koska polynomifunktio kasvaa rajatta.



Huom!
Koska funktio $f(x) = x^2(6-x)^4$ on parillisten potenssien tulo, niin se ei voi saada negatiivisia arvoja.