Funktion jatkuvuus

- Tutkitaan applettia.
- Määritelmä: Funktio f on jatkuva kohdassa a, jos tässä kohdassa funktion f arvo on sama kuin funktion f raja-arvo. Ts. f on jatkuva kohdassa a, jos $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Esimerkki 1

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3}{3}, kun\ x \leq 3 \\ \frac{2x+1}{x+1}, kun\ x > 3 \end{cases}$ jatkuva kohdassa

a) $x = 2$ b) $x = 3$?

Ratkaisu.

a) Kohdassa $x = 2$ ja molemmin puolin sen läheisyydessä funktio määritellään lausekkeella $\frac{x^2-3}{3}$, joten sen tarkastelu riittää.

Lasketaan funktion arvo ja raja-arvo kohdassa $x = 2$.

$$f(2) = \frac{2^2 - 3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3}{3} = \frac{2^2 - 3}{3} = \frac{1}{3}$$

Koska funktion arvo ja raja-arvo ovat samat, funktion on jatkuva kohdassa $x = 2$.

b) Funktio on määritelty kohdassa $x = 3$, ja sen arvo tässä kohdassa on $f(3) = \frac{3^2-3}{3} = 2$.

Tutkitaan toispuolisia raja-arvoja.

$$\lim_{x \to 3-} \frac{x^2 - 3}{3} = \frac{3^2 - 3}{3} = 2$$

$$\lim_{x \to 3+} \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 + 1} = \frac{7}{4}$$

Koska funktion toispuoliset raja-arvot ovat eri suuria, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 3$. Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 3$.

Funktion jatkuvuus

- Määritelmä: Funktio on jatkuva välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva kyseisen välin jokaisessa kohdassa.
- Jos funktio on jatkuva **määrittelyjoukkonsa** jokaisessa kohdassa, sanotaan, että funktio on jatkuva.
- Polynomifunktiot ja rationaalifunktiot ovat jatkuvia funktioita.

Funktion jatkuvuus

- Lause (Bolzanon lause)

Funktiolla on ainakin yksi nollakohta avoimella välillä $]a, b[$, jos

- funktio on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$
- funktion arvot välin päätepisteissä ovat erimerkkiset.

Esimerkki 2

Onko funktiolla $f(x) = x^3 - 4x + 1$ nollakohtaa välillä $[1, 3]$?

Ratkaisu.

Funktio f on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla ja siksi jatkuva myös välillä $[1, 3]$. Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.

$$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 1 = -2 < 0$$
$$f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 + 1 = 16 > 0$$

Koska f saa erimerkkiset arvot välin $[1, 3]$ päätepisteissä, funktiolla f on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 3[$. Tällöin myös välillä $[1, 3]$ on ainakin yksi nollakohta.