Derivaattafunktio

- Funktion f *derivaattafunktio* f' on funktio, jonka arvo $f'(x)$ on funktion f derivaatta kohdassa x.
- Toisin sanoen derivaattafunktion f' arvo jossain tietyssä kohdassa kertoo millä nopeudella (miten jyrkästi) funktion f arvot muuttuvat tässä kohdassa.
- Derivaattafunktio on määritelty niissä kohdissa, joissa f on derivoituva.
  - Muodostetaan funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio derivaatan määritelmän avulla: (Esim. 2, oppikirja s. 67)
  - Funktion f derivaatta kohdassa $x = a$ on erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

$$=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

- Siis funktion f derivaatta kohdassa a on $2a$.
- Kohtaa voidaan merkitä myös kirjaimella x, jolloin derivaatta on $2x$.
- Funktion $f(x)=x^2$ derivaattafunktioksi saadaan näin ollen $f'(x)=2x$.
- Muodostetaan derivaattafunktio vertailun vuoksi myös ”h-muotoisen” erotusosamäärän raja-arvona (tällöin muuttujakirjainta ei tarvitse vaihtaa)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

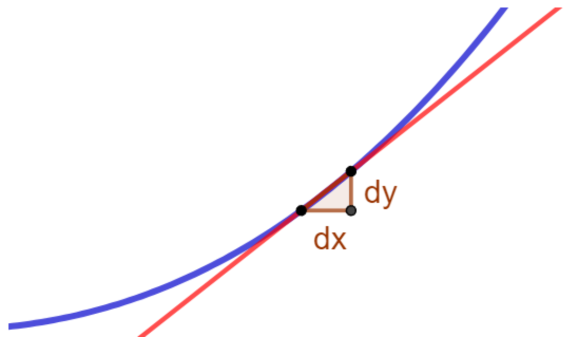
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Derivoiminen

- Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan *derivoimiseksi*.
- Derivointi voidaan merkitä myös *derivaattaoperaattorien* D tai $\frac{d}{dx}$ avulla.
- Siis $f'(x) = Df(x) = \frac{d}{dx}f(x)$.

Jälkimmäisestä muodosta nähdään, minkä muuttujan (tässä x) suhteen derivoidaan.

- Koska koordinaatistossa $f(x) = y$, myös $y' = \frac{dy}{dx}$ on yksi derivaatan merkitsemistapa.
- Tässä dx on äärettömän pieni muuttujan arvon muutos (lisäys) ja dy tätä vastaava funktion arvojen muutos.
  - Erotusosamäärästä $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tulee derivaatta $\frac{dy}{dx}$, kun $\Delta x \to 0$.



Derivoimiskaavoja

- Seuraavat derivoimiskaavat voidaan johtaa suoraan derivaatan määritelmästä ja raja-arvon ominaisuuksista, ks. oppikirja s. 68-69.
- Vakiofunktion, $f(x) = c =$ vakio, derivaatta on nollafunktio: $Dc = 0$.
- Potenssifunktion $f(x) = x^n, n = 1, 2, 3, \ldots$ derivaatta saadaan kaavalla

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

Eksponentti pienenee yhdellä ja alkuperäinen eksponentti tulee eteen kertoimeksi

- Summat voidaan derivoida termeittäin:

$$D\big(f(x) + g(x)\big) = Df(x) + Dg(x)$$

- Vakiokerroin (k) voidaan siirtää derivoinnin eteen:

$$Dkf(x) = kDf(x)$$

- Edellisten sääntöjen avulla voidaan määrittää minkä tahansa polynomifunktion derivaatta
- Derivointi voidaan suorittaa termeittäin ja x:n potenssien mahdolliset kertoimet voidaan siirtää derivoinnin eteen
- Derivaattafunktion asteluku on aina yhden pienempi kuin alkuperäisen funktion asteluku.
- Esimerkkejä:

1. $D(3x^5) = 3Dx^5 = 3 \cdot 5x^{5-1} = 15x^4$

   Vakion siirtosääntö Potenssin derivoimiskaava

2. $D(x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 2x - 5) = 4x^{4-1} - 2 \cdot 3x^{3-1} + 10 \cdot 2x^{2-1} + 2$

   Derivoidaan termeittäin

   $D(2x) = 2$

   $= 4x^3 - 6x^2 + 20x + 2$

   $D5 = 0$

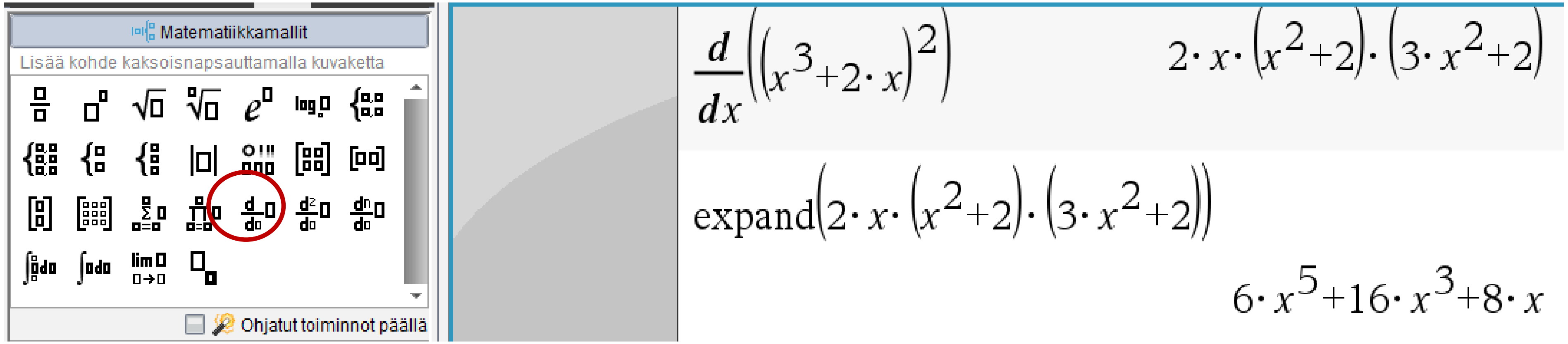
3. $D(x^3 + 2x)^2 = D(x^6 + 4x^4 + 4x^2) = 6x^5 + 4 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 2x$

Kerrotaan sulut auki ennen derivointia (funktion potenssin derivointikaavaa ei vielä osata)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Tässä $a = x^3$ ja $b = 2x$

$$= 6x^5 + 16x^3 + 8x$$

TI-Nspire:



TI-Nspire ilmoittaa tuloksen tekijöihin jaetussa muodossa. Komennolla ”expand” (laajenna) sulut kerrotaan auki.

GeoGebrassa komento ”derivaatta(f)” muodostaa derivaattafunktion f'. Algebra-ikkunassa vastaus on polynomimuodossa, CAS-tilassa tekijöihin jaettuna.