Derivaattafunktio

- Funktion f *derivaattafunktio* f' on funktio, jonka arvo $f'(x)$ on funktion f derivaatta kohdassa x.
- Derivaattafunktio on määritelty niissä kohdissa, joissa f on derivoituva.
- Muodostetaan funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio derivaatan määritelmän avulla: (Esim. 2, s. 67)
  - Funktion f derivaatta kohdassa $x = a$ on erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x + a)\cancel{(x - a)}}{\cancel{x - a}} = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a$$

  - Siis funktion f derivaatta kohdassa a on $2a$. Kohtaa voidaan merkitä myös kirjaimella x, jolloin derivaatta on $2x$. Funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktioksi saadaan siis $f'(x) = 2x$.

Derivoiminen

- Derivaattafunktion määrittämistä kutsutaan *derivoimiseksi*.
- Derivointi voidaan merkitä myös derivaattaoperaattorien D tai $\frac{d}{dx}$ avulla. Siis $f'(x) = Df(x) = \frac{d}{dx}f(x)$.
- Seuraavat derivoimiskaavat voidaan johtaa suoraan derivaatan määritelmästä (ja raja-arvon ominaisuuksista), ks. s. 68-69.
  - Vakiofunktion, $f(x) = c =$ vakio, derivaatta on nollafunktio: $Dc = 0$.
  - Potenssifunktion $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ derivaatta saadaan kaavalla

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

Eksponentti pienenee yhdellä ja alkuperäinen eksponentti tulee eteen kertoimeksi

  - Summa voidaan derivoida erikseen: $D\big(f(x) + g(x)\big) = Df(x) + Dg(x)$
  - Vakio (k) voidaan siirtää derivoinnin ulkopuolelle: $Dkf(x) = kDf(x)$

- Edellisten sääntöjen avulla voidaan määrittää minkä tahansa polynomifunktion derivaatta
  - Derivointi voidaan suorittaa termeittäin ja x:n potenssien mahdolliset kertoimet voidaan siirtää derivoinnin eteen
- Derivaattafunktion asteluku on yhden pienempi kuin alkuperäisen funktion
- Esimerkkejä:

1. $D3x^5 = 3Dx^5 = 3 \cdot 5x^{5-1} = 15x^4$

   Vakion siirtosääntö   Potenssin derivoimiskaava

2. $D(x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 2x - 5) = 4x^{4-1} - 2 \cdot 3x^{3-1} + 10 \cdot 2x^{2-1} + 2$

   Derivoidaan termeittäin

   $D2x = 2$ ja $D5 = 0$

   $= 4x^3 - 6x^2 + 20x + 2$

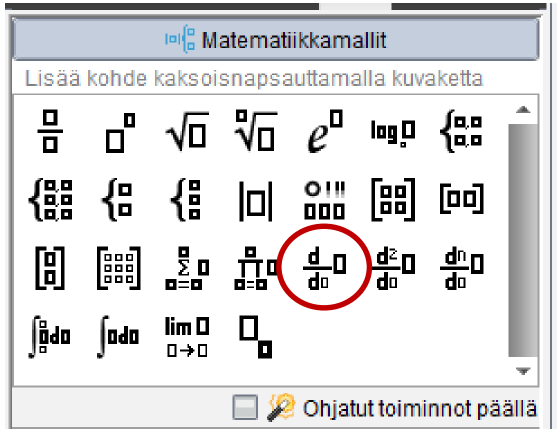
3. $D(x^3 + 2x)^2 = D(x^6 + 4x^4 + 4x^2) = 6x^5 + 4 \cdot 4x^3 + 4 \cdot 2x$

Kerrotaan sulut auki ennen derivointia (funktion potenssin derivointikaavaa ei vielä osata)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Tässä $a = x^3$ ja $b = 2x$

$$= 6x^5 + 16x^3 + 8x$$

TI-Nspire:



$$\frac{d}{dx}\left(\left(x^3+2\cdot x\right)^2\right) \qquad 2\cdot x\cdot\left(x^2+2\right)\cdot\left(3\cdot x^2+2\right)$$

$$\text{expand}\left(2\cdot x\cdot\left(x^2+2\right)\cdot\left(3\cdot x^2+2\right)\right) \qquad 6\cdot x^5+16\cdot x^3+8\cdot x$$

TI-Nspire ilmoittaa tuloksen tekijöihin jaetussa muodossa. Komennolla "expand" (laajenna) sulut kerrotaan auki.

GeoGebrassa komento "derivaatta(f)" muodostaa derivaattafunktion f'. Algebra-ikkunassa vastaus on polynomimuodossa, CAS-tilassa tekijöihin jaettuna.

$f(x) = (x^3 + 2x)^2$

$f'(x) =$ Derivaatta(f)

$\rightarrow 6x^5 + 16x^3 + 8x$

1 Derivaatta(f)

$\rightarrow 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x)$

2