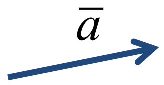
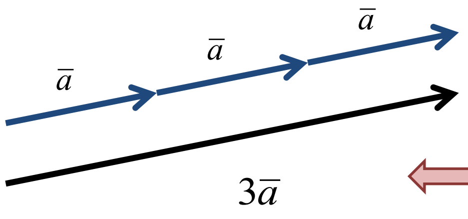
Vektorin kertominen luvulla

- Kun vektori kerrotaan kokonaisluvulla, niin geometrisesti ajateltuna kertolasku voidaan tulkita summaksi:



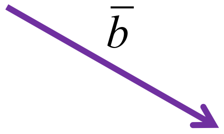
Esimerkiksi vektorin kertominen kolmella on summa:

$$3\bar{a} = \bar{a} + \bar{a} + \bar{a}$$



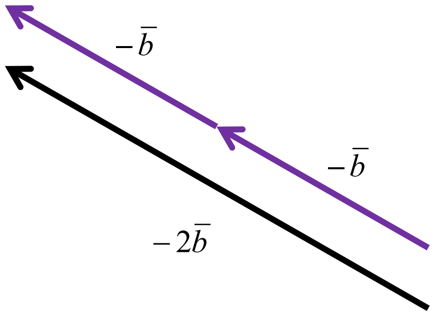
Vektorin pituus kolminkertaistui, mutta suunta ei muuttunut.

- Negatiivisella luvulla kertominen tapahtuu vastavektorin avulla:



Esim.

$$-2\bar{b} = -\bar{b} + (-\bar{b})$$



Vektorin pituus kaksinkertaistui ja suunta muuttui vastakkaiseksi.

- Vektorin $\bar{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ kertominen *reaaliluvulla* t määritellään seuraavasti:

$$t \cdot \bar{a} = t\bar{a} = t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix}$$

- Siis vektorin kertominen luvulla tarkoittaa vektorien komponenttien kertomista kyseisellä luvulla.
- Kun $t \neq 0$, vektorit $t\bar{a}$ ja $\bar{a}$ ovat yhdensuuntaisia ($t\bar{a} \parallel \bar{a}$).
- Tarkemmin sanottuna:

  $t\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$, kun $t > 0$ (Vektorit *samansuuntaisia*)

  $t\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}$, kun $t < 0$ (Vektorit *vastakkaissuuntaisia*)
- Vektorin $t\bar{a}$ pituus on vektorin $\bar{a}$ pituus kerrottuna t:n itseisarvolla:

$$|t\bar{a}| = |t||\bar{a}|$$

Kun vektoria kerrotaan jollakin luvulla t, niin vektoria ”venytetään” tai ”kutistetaan” kertoimella $|t|$. (Esimerkiksi kerroin $0{,}8$ lyhentää vektorin pituutta $20\ \%$.)

Laskulakeja vektorin ja skalaarin tulolle

- Liitäntälaki: $r(s\bar{a}) = (rs)\bar{a} = rs\bar{a}$

  Esimerkki: $-2\left(-\frac{1}{4}\bar{a}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{a}$

- Osittelulait:

  $(r+s)\bar{a} = r\bar{a} + s\bar{a}$ ja $r\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = r\bar{a} + r\bar{b}$

  Esimerkkejä:

  $-9\bar{a} + 7\bar{a} = (-9+7)\bar{a} = -2\bar{a}$ ja $-3\left(2\bar{a} - 5\bar{b}\right) = -3 \cdot (2\bar{a}) - 3 \cdot \left(-5\bar{b}\right)$

  $= -6\bar{a} + 15\bar{b}$

- Vektorilausekkeita voidaan siis sieventää samaan tapaan kuin polynomejakin.

Yhdensuuntaisuusehto

- Jos on olemassa sellainen reaaliluku $t \neq 0$, että
$$\bar{a} = t\bar{b},$$
niin vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisia vektorin ja luvun kertolaskun määritelmän perusteella.
- Myös käänteinen lause pätee:
Jos vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaisia, niin on olemassa sellainen reaaliluku t, että $\bar{a} = t\bar{b}$.
  - Tämä luku on joko $t = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$, tai $t = -\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$.
- Tulos voidaan esittää *yhdensuuntaisuusehtona*
$$\bar{a} = t\bar{b} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Kaksi vektoria ($\neq \bar{0}$) ovat yhdensuuntaisia täsmälleen silloin kun vektori saadaan toisesta jollakin luvulla kertomalla.

t. 648, s. 170

a) Vektorit $\bar{u} = \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \end{bmatrix}$ ja $\bar{v} = \begin{bmatrix} -60 \\ 18 \end{bmatrix}$ ovat yhdensuuntaisia, jos on olemassa sellainen luku t, että $\bar{u} = t\bar{v}$ tai $\bar{v} = t\bar{u}$. Toisin sanoen vektorit ovat yhdensuuntaisia, jos toinen vektori saadaan toisesta jollakin luvulla kertomalla.

Kyseinen luku voidaan ratkaista vektoriyhtälöstä

$$\begin{bmatrix} -60 \\ 18 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Vektoriyhtälön voi kirjoittaa kahdella eri tavalla, mutta näin päin kerroin t tulee olemaan kokonaisluku.

Komponentteja vertailemalla saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -60 = 20t \\ 18 = -6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-60}{20} = -3 \\ t = \dfrac{18}{-6} = -3 \end{cases}.$$

Luvun $t = -3$ voi löytää ilman yhtälöpariakin: $20 \cdot (-3) = -60$ ja $-6 \cdot (-3) = 18$. Vaihtoehtoisesti voidaan tutkia myös vektoreiden $x -$ ja $y -$komponenttien suhdetta: $\frac{20}{-6} = -\frac{10}{3}$ ja $\frac{-60}{-18} = -\frac{10}{3}$. Yhdensuuntaisilla vektoreilla komponenttien suhde on sama.

Koska $t = -3$ toteuttaa yhtälöparin, vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ovat yhdensuuntaisia.

b) Vektorit $\bar{u} = \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \end{bmatrix}$ ja $\overline{w} = \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix}$ ovat erisuuntaisia, jos ei ole olemassa sellaista lukua t, että $\bar{u} = t\overline{w}$ (tai $\overline{w} = t\bar{u}$).

Muodostetaan vektoriyhtälö

$$\begin{bmatrix} 20 \\ -6 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 14 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Komponentteja vertailemalla saadaan yhtälöpari

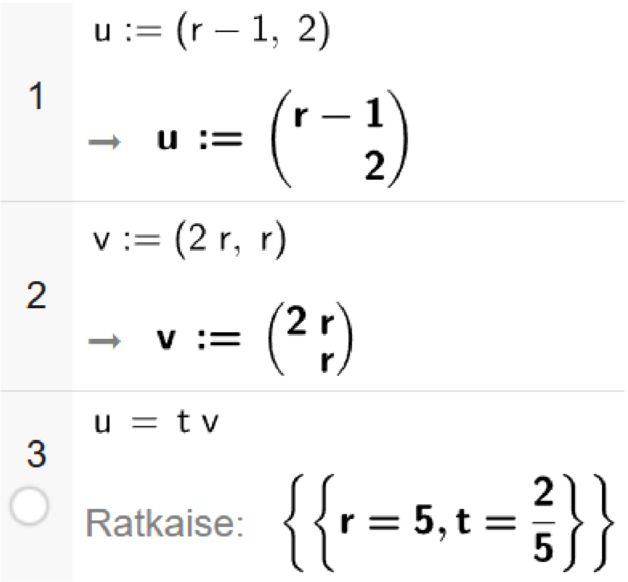
$$\begin{cases} 20 = 14t \\ -6 = -4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{20}{14} = \dfrac{10}{7} \\ t = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Koska $\frac{10}{7} \neq \frac{3}{2}$, vektorit $\bar{u}$ ja $\overline{w}$ ovat erisuuntaiset.

t. 655, s. 171

Vektorit $\bar{u} = \begin{bmatrix} r-1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2r \\ r \end{bmatrix}$ ovat vastakkaissuuntaisia, jos on olemassa sellainen negatiivinen luku t, että $\bar{u} = t\bar{v}$ (tai $\bar{v} = t\bar{u}$).

Ratkaistaan vektoriyhtälö $\bar{u} = t\bar{v}$ GeoGebran CAS-tilassa.



Yhtälön ainoa ratkaisu on $r = 5$ ja $t = \frac{2}{5}$.

Koska $t > 0$, lukua r ei voida valita niin, että vektorit $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ olisivat vastakkaissuuntaiset.

Kun $r = 5$, vektorit ovat $\bar{u} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Vektorin $\bar{u}$ komponentit ovat $\frac{2}{5}$ vektorin $\bar{v}$ komponenteista. Täten vektorit ovat yhdensuuntaisia (mutta eivät vastakkaissuuntaisia) ja vektorin $\bar{u}$ pituus on $\frac{2}{5}$ vektorin $\bar{v}$ pituudesta.

Vektoriyhtälön ratkaisu ilman teknisiä apuvälineitä:

$$\bar{u} = t\bar{v}$$

$$\begin{bmatrix} r-1 \\ 2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2r \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r-1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2rt \\ rt \end{bmatrix} \iff \begin{cases} r-1 = 2rt \\ 2 = rt \end{cases}$$

Sijoituksessa voidaan hieman oikaista, kun tulon rt arvo tiedetään.

$$\Rightarrow \quad r - 1 = 2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad r = 5$$

Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön.

$$\Rightarrow \quad 2 = 5 \cdot t$$

$$t = \frac{2}{5}$$