Pistetulo

- Tason vektorien $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = u_x\bar{\imath} + u_y\bar{\jmath}$ ja $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath}$ *pistetulo* määritellään seuraavasti:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_x v_x + u_x v_x$$

- Esimerkkejä:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = -6 + 4 = -2$$

$$(-\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}) \cdot (\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) = -1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$$

$$(3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) \cdot 3\bar{\jmath} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$$

TI-Nspire:

$\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ^{-}2 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$ $\quad {}^{-}2$

- Tuloksena on reaaliluku eli *skalaari*. Siksi pistetuloa kutsutaan usein myös *skalaarituloksi*.

Vektorien kohtisuoruus

- Vektorit ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos niiden pistetulo on nolla:

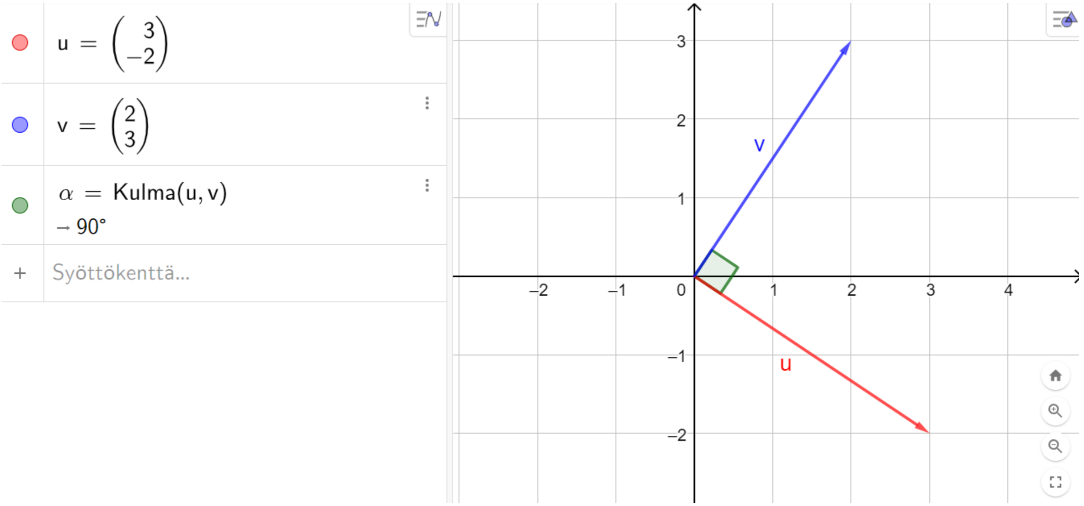
$$\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

(Kohtisuoruuden lyhennysmerkintä ⊥)

  – Todistus oppikirjassa s. 189

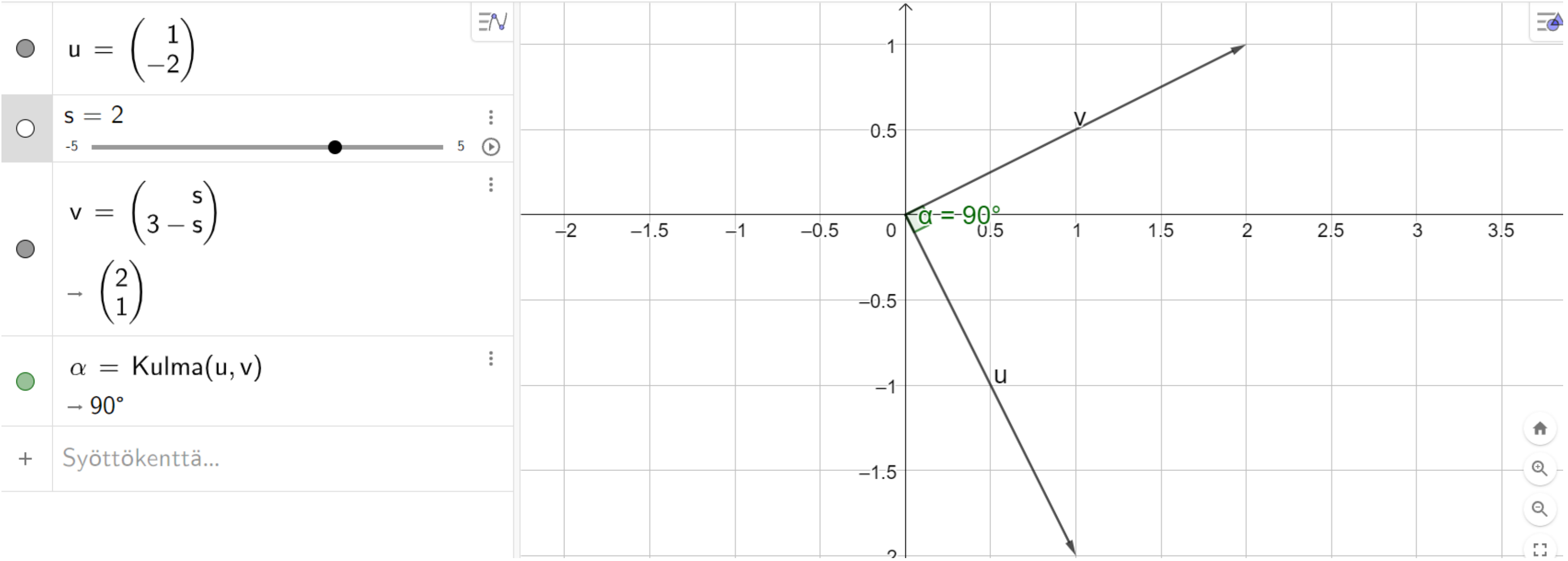
  – Esim. vektorit $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ja $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ovat kohtisuorassa, koska niiden pistetulo on nolla:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$



t. 706, s. 195

a) Huomaa, että GeoGebrassa ei voi käyttää parametrina kirjainta t (tai kirjaimia x, y, z).



b) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\bar{v} = \begin{bmatrix} t \\ 3-t \end{bmatrix}$

Vektorien $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ ja välinen kulma on suora, jos ja vain jos vektorien pistetulo on nolla:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 \cdot t - 2 \cdot (3 - t) = 0$$

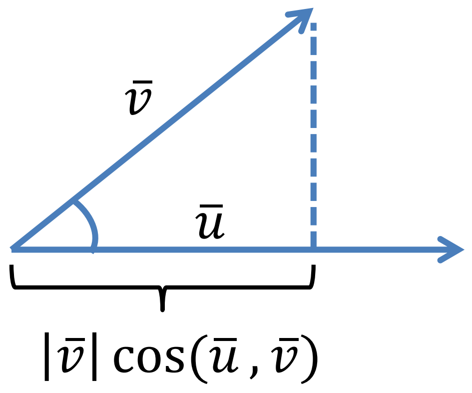
$$t - 6 + 2t = 3t - 6 = 0$$

$$t = 2$$

Vektorien välinen kulma

- Vektorien pistetulo voidaan (kosinilauseen avulla) tulkita geometrisesti vektorien pituuksien ja vektorien välisen kulman kosinin avulla: (ks. oppikirja s. 190-191)

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos(\bar{u}, \bar{v}) \qquad \bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$$



Lasketaan ensin kumman tahansa vektorin pituus ja toisesta vektorista ensimmäisen vektorin suuntaisen komponentin (ns. *projektion*) pituus ja kerrotaan nämä keskenään.

- Pistetulon avulla voidaan laskea vektorien välisen kulman kosini ja siten myös vektorien välinen kulma:

$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

Esimerkki:

Lasketaan vektorien $\bar{a} = 7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = -3\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$ välinen kulma asteen tarkkuudella:

Vektorien välisen kulman kosini on

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

$$= \frac{(7\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}) \cdot (-3\bar{\imath} + 5\bar{\jmath})}{\sqrt{7^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{7 \cdot (-3) + 2 \cdot 5}{\sqrt{49 + 4} \cdot \sqrt{9 + 25}}$$

$$= \frac{-21 + 10}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}} = \frac{-11}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}}$$

```
-11/(sqrt(53)*sqrt(34))
= -0,2591285660873500193 7
```

Vektorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \arccos \frac{-11}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}} \approx 105°$$

```
arccos(ans)
= 105,01836063115066661945
```