

# Pistetulo

- Tason vektorien  $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j}$  ja  $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j}$  pistetulo määritellään seuraavasti:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

- Huomaa, että tulos ei ole vektori, vaan reaaliluku.
- Esimerkkejä:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = -6 + 4 = -2$$

$$(-\bar{i} + 5\bar{j}) \cdot (\bar{i} + 2\bar{j}) = -1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$$

$$(3\bar{i} + 2\bar{j}) \cdot 3\bar{j} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$$

GeoGebra:  
(CAS-tila)

1	a: = (3, 1)
<input checked="" type="radio"/>	→ a := $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2	b: = (-2, 4)
<input checked="" type="radio"/>	→ b := $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
3	a · b
<input type="radio"/>	→ -2

# Vektorien kohtisuoruus

- Vektorit ovat kohtisuorassa, jos ja vain jos niiden pistetulo on nolla:

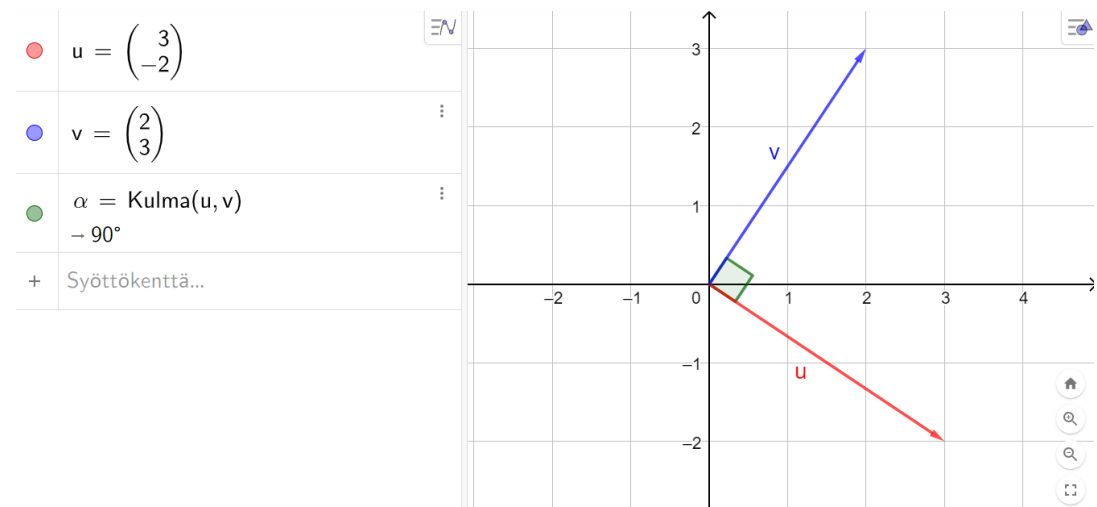
$$\bar{u} \perp \bar{v} \iff \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

(Kohtisuoruuden  
lyhennysmerkintä  $\perp$ )

– Todistus oppikirjassa s. 189

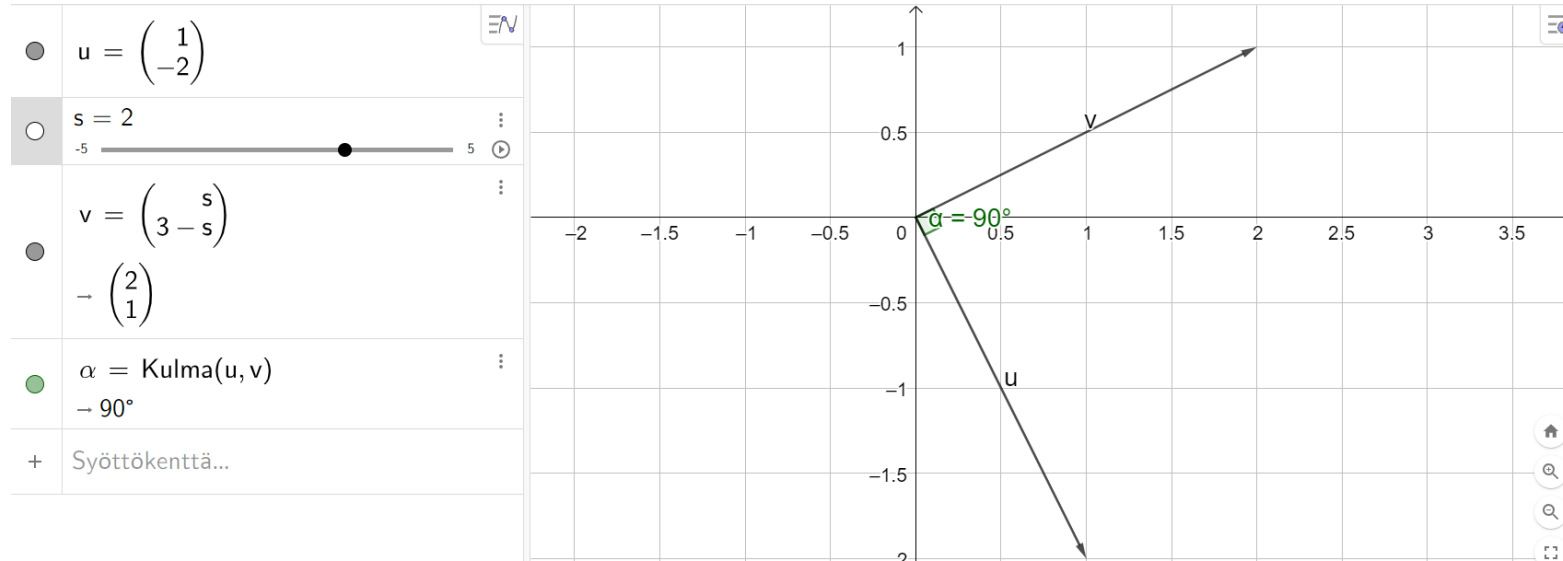
– Esim. vektorit  $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$  ja  $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  ovat kohtisuorassa, koska niiden pistetulo on nolla:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$



t. 706, s. 195

a)



Huomaa, että GeoGebrassa ei voi käyttää parametrina kirjainta  $t$  (tai kirjaimia  $x, y, z$ ).

b)

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} t \\ 3 - t \end{bmatrix}$$

Vektorien  $\bar{u}$  ja  $\bar{v}$  välinen kulma on suora, jos ja vain jos vektorien pistetulo on nolla:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 \cdot t - 2 \cdot (3 - t) = 0$$

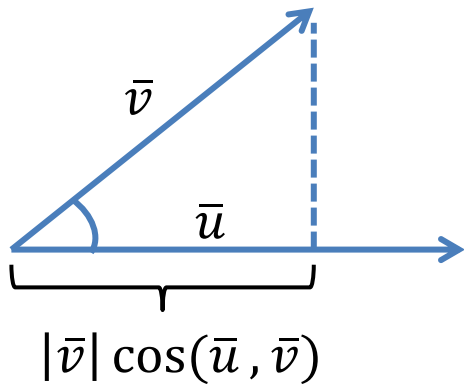
$$t - 6 + 2t = 3t - 6 = 0$$

$$t = 2$$

# Vektorien välinen kulma

- Vektorien pistetulo voidaan (kosinilauseen avulla) tulkita geometrisesti vektorien pituuksien ja vektorien välisen kulman kosinin avulla: (ks. oppikirja s. 190-191)

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}| \cos(\bar{u}, \bar{v}) \quad \bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$$



Lasketaan ensin kumman tahansa vektorin pituus ja toisesta vektorista ensimmäisen vektorin suuntaisen komponentin (ns. *projektion*) pituus ja kerrotaan nämä keskenään.

- Pistetulon avulla voidaan laskea vektorien välisen kulman kosini ja siten myös vektorien välinen kulma:

$$\cos(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

### Esimerkki:

Määritä vektorien  $\bar{a} = 7\bar{i} + 2\bar{j}$  ja  $\bar{b} = -3\bar{i} + 5\bar{j}$  välinen kulma asteen tarkkuudella.

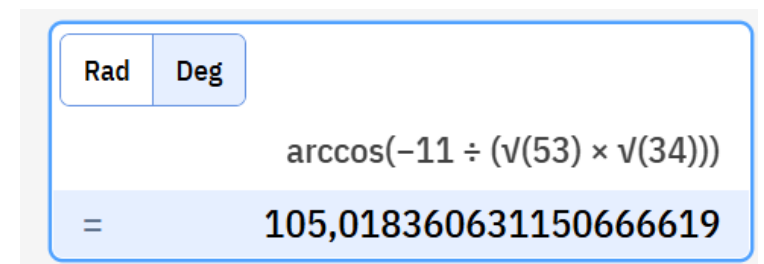
Vektorien välisen kulman kosini on

$$\begin{aligned}\cos(\bar{a}, \bar{b}) &= \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \\ &= \frac{(7\bar{i} + 2\bar{j}) \cdot (-3\bar{i} + 5\bar{j})}{\sqrt{7^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 5^2}} \\ &= \frac{7 \cdot (-3) + 2 \cdot 5}{\sqrt{49 + 4} \cdot \sqrt{9 + 25}} \\ &= \frac{-21 + 10}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}} = \frac{-11}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}}\end{aligned}$$

Vektorien välinen kulma on

$$\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}) = \arccos \frac{-11}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{34}} \approx 105^\circ$$

Abicus:



The image shows a calculator interface with a blue border. At the top, there are two buttons: "Rad" and "Deg". Below them, the expression  $\arccos(-11 \div (\sqrt{53} \times \sqrt{34}))$  is entered. The result,  $105,018360631150666619$ , is displayed in a light blue box at the bottom.