6. Piste hukassa 12 p.

Tason pisteen C etäisyys pisteestä $A = (5, 4)$ on $\sqrt{20}$ ja etäisyys pisteestä $B = (8, -2)$ on $\sqrt{65}$. Lisäksi pisteen C etäisyys pisteen B kautta kulkevasta, vektorin $5\,\overline{i} + 2\,\overline{j}$ suuntaisesta suorasta s on alle 7. Määritä pisteen C koordinaatit sekä pisteen C tarkka etäisyys suorasta s.

Ratkaistaan tehtävä ensin graafisesti GeoGebran avulla.

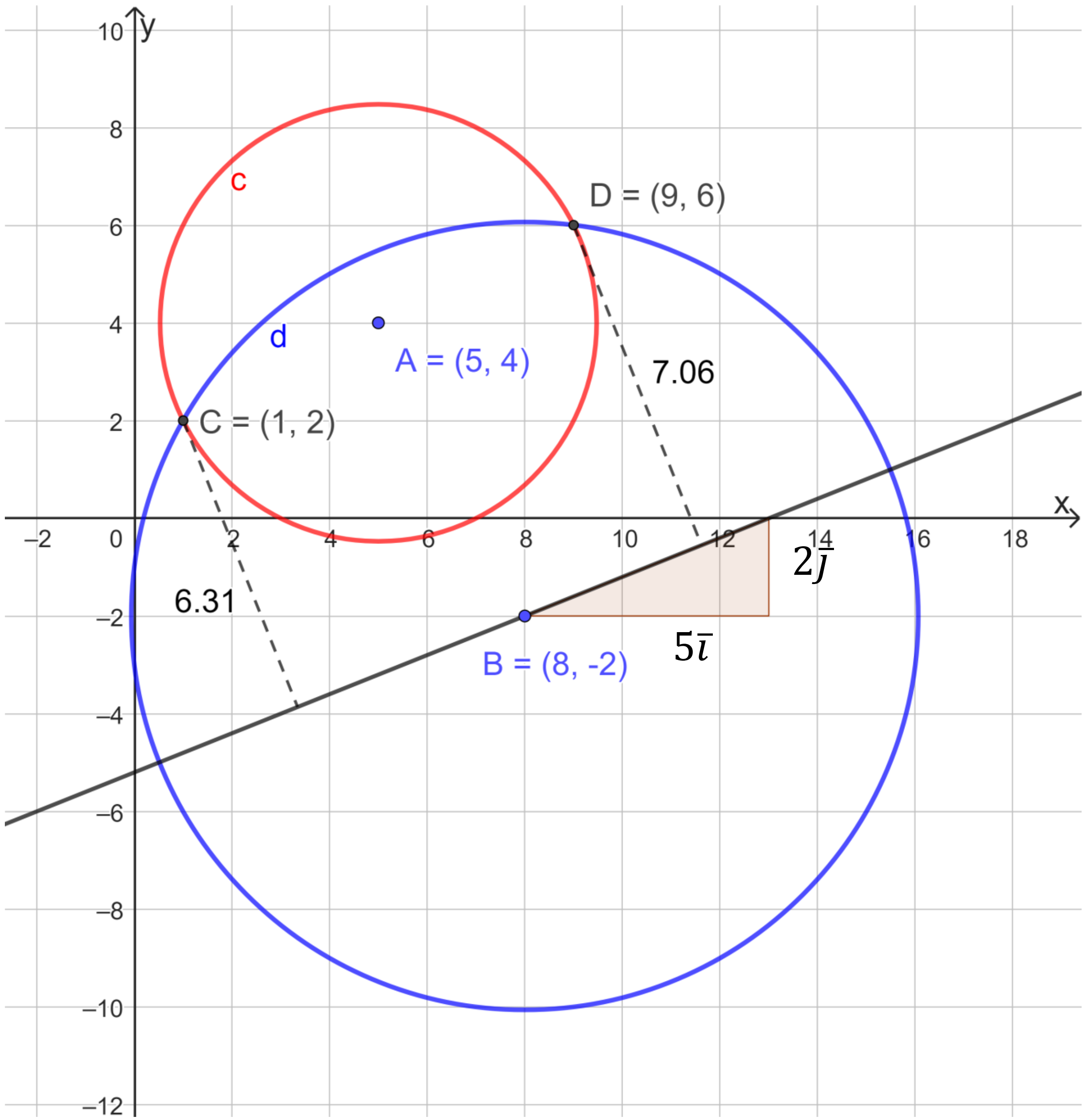
Piste C sijaitsee pisteistä A ja B piirrettyjen $\sqrt{20}$ ja $\sqrt{65}$ -säteisten ympyröiden leikkauspisteessä.

Ympyrän, jonka keskipiste on A ja säde $\sqrt{20}$, voi piirtää komennolla ”**ympyrä(A,sqrt(20))**”.

Vektorin $5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$ komponenttiesitys on $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.
($\bar{\imath}$ ja $\bar{\jmath}$ ovat $x-$ ja $y-$akselien suuntaisia *kantavektoreita*, joiden pituus on 1. Katso oppikirja s. 174.)

Suora voidaan määrittää (GeoGebralla) yhden pisteen ja ns. *suuntavektorin* avulla. Suuntavektori voi olla mikä tahansa suoran suuntainen vektori eli tässä tapauksessa esimerkiksi vektori $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Jos suuntavektorin nimi on v, niin suora saadaan komennolla ”**suora(B,v)”.**

Lisätään kuvaan vielä normaalisuorien avulla piirretyt etäisyysjanat.



c
d
D = (9, 6)
A = (5, 4)
C = (1, 2)
B = (8, -2)
7.06
6.31
$2\bar{j}$
$5\bar{\imath}$
x
y

Kuvan perusteella kysytty piste on $C = (1, 2)$.

Ratkaistaan tehtävä vielä tarkasti laskinohjelmalla.

Ympyrän, jonka keskipiste on $A = (5, 4)$ ja säde $r = \sqrt{20}$, keskipistemuotoinen yhtälö on

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20.$$

Vastaavasti ympyrän, jonka keskipiste on $B = (8, -2)$ ja säde $r = \sqrt{65}$, yhtälö on

$$(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 65.$$

Leikkauspisteiden koordinaatit $(1, 2)$ ja $(9, 6)$ saadaan yhtälöparista laskinohjelmalla:

$$\mathrm{solve}\left(\begin{cases}(x-5)^2+(y-4)^2=20\\(x-8)^2+(y+2)^2=65\end{cases},x,y\right) \qquad x=1 \text{ and } y=2 \text{ or } x=9 \text{ and } y=6$$

Muodostetaan seuraavaksi suoran s yhtälö.

Suoran suuntavektorin $5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ perusteella suoran kulmakerroin on $k = \frac{2}{5}$.

(Suora menee suuntaan ”5 oikealle ja 2 ylös”.)

Koska suora kulkee pisteen $B = (8, -2)$ kautta, on sen yhtälö muotoa

$$y - (-2) = \frac{2}{5}(x - 8).$$

Taulukkokirja:

pisteen (x_0, y_0) kautta kulkeva suora

$y - y_0 = k(x - x_0)$

Kirjoitetaan yhtälö yleiseen muotoon.

$$y + 2 = \frac{2}{5}(x - 8) \quad \Big| \cdot 5$$

$$5(y + 2) = 2(x - 8)$$

$$5y + 10 = 2x - 16$$

$$2x - 5y - 26 = 0$$

Määritetään leikkauspisteiden etäisyydet suorasta $2x - 5y - 26 = 0$.

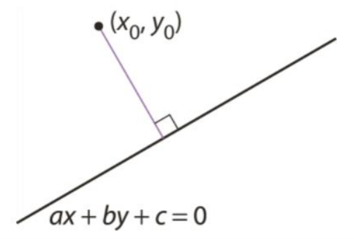
Nyt pisteen etäisyyden kaavassa $a = 2$, $b = -5$ ja $c = -26$.

Lasketaan ensin etäisyys d leikkauspisteestä $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Tulokseksi saadaan $d = \frac{34\sqrt{29}}{29} \approx 6{,}31 < 7$.

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$a:=2$	2
$b:=^-5$	$^-5$
$c:=^-26$	$^-26$
$x0:=1$	1
$y0:=2$	2
$\frac{\lvert a\cdot x0+b\cdot y0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{34\cdot\sqrt{29}}{29}$
$\frac{\lvert a\cdot x0+b\cdot y0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	6.31364

Likiarvon saa TI-Nspirellä painamalla ”ctrl+Enter”.

Lasketaan vastaavalla tavalla etäisyys pisteestä $(9, 6)$.

Tuloksekseksi saadaan $d = \frac{38\sqrt{29}}{29} \approx 7{,}06 > 7$.

$x0 := 9$	9
$y0 := 6$	6
$\frac{\lvert a \cdot x0 + b \cdot y0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$\frac{38 \cdot \sqrt{29}}{29}$
$\frac{\lvert a \cdot x0 + b \cdot y0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	7.05642

Kysytty piste on siis $(1, 2)$.