

K2023/4

4. Suoran etäisyys kahdesta pisteestä 12 p.

Määritä kaikki suorat, joiden etäisyys pisteestä $A = (-2, 0)$ on 2 ja etäisyys pisteestä $B = (3, 0)$ on 3.

Selvästi yksi ratkaisu on suora $x = 0$ eli y -akseli.

Muut ratkaisut ovat muotoa $y = kx + b$.

Kirjoitetaan suoran yhtälö normaalimuotoon: $kx - y + b = 0$.

Yleisen muodon $ax + by + c = 0$ parametrit ovat nyt $a = k$, $b = -1$ ja $c = b$.

Huomaa, että yleisestä muodosta voidaan jakaa yksi parametri pois, jos tiedetään, että se ei ole nolla.

Suoran määrittämiseen riittää kaksi tietoa, vaikka yleisessä muodossa onkin kolme parametria.

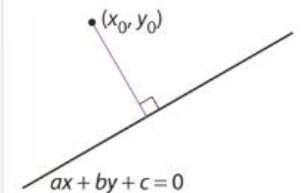
Koska suoran etäisyys pisteestä $(-2, 0)$ on 2, saadaan pisteen etäisyyden kaavasta yhtälö

$$2 = \frac{|k \cdot (-2) - 1 \cdot 0 + b|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}}$$

$$2 = \frac{|-2k + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Pisteen (x_0, y_0) etäisyys suorasta

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Vastaavasti, koska suoran etäisyys pisteestä (3, 0) on 3, saadaan yhtälö

$$3 = \frac{|k \cdot 3 - 1 \cdot 0 + b|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow 3 = \frac{|3k + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

Sievennetään yhtälöitä korottamalla ne neliöön:

$$\begin{aligned} 2 = \frac{|-2k + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} &\Leftrightarrow 4 = \frac{(-2k + b)^2}{k^2 + 1} \Leftrightarrow 4(k^2 + 1) = (-2k + b)^2 \\ &4k^2 + 4 = 4k^2 - 4kb + b^2 \\ &4 = -4kb + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 = \frac{|3k + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} &\Leftrightarrow 9 = \frac{(3k + b)^2}{k^2 + 1} \Leftrightarrow 9(k^2 + 1) = (3k + b)^2 \\ &9k^2 + 9 = 9k^2 + 6kb + b^2 \\ &9 = 6kb + b^2 \end{aligned}$$

Saadaan yhtälöpari, joka voidaan helpoimmin ratkaista yhteenlaskukeinolla:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 4 = -4kb + b^2 \\ 9 = 6kb + b^2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 12 = -12kb + 3b^2 \\ 18 = 12kb + 2b^2 \end{array} \right. \\ \hline 30 = 5b^2 \\ b^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm\sqrt{6} \end{array}$$

Sijoitetaan b :n arvot ylimpään yhtälöön:

$$\begin{array}{ll} 4 = -4k \cdot \sqrt{6} + 6 & \text{tai} \quad 4 = -4k \cdot (-\sqrt{6}) + 6 \\ -2 = -4k \cdot \sqrt{6} & -2 = 4k \cdot \sqrt{6} \\ k = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} & k = -\frac{2}{4\sqrt{6}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{array}$$

Ratkaisuiksi saadaan suorat

$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}}x + \sqrt{6},$$

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{6}}x - \sqrt{6}$$

sekä suora $x = 0$.

