

2. Vektoreita ja analyttistä geometriaa (12 p.)

Olkoon $\bar{u} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$.

1. Määritä vektorin \bar{u} pituus. (3 p.)
2. Määritä vektorin \bar{u} kanssa vastakkaissuuntainen vektori, jonka pituus on 5. (3 p.)
3. Suora L kulkee pisteiden $A = (4, 4)$ ja $B = (-1, -8)$ kautta. Ovatko suora L ja vektori \bar{u} yhdensuuntaisia (3 p.)
4. Määritä suoran L yhtälö muodossa $y = kx + b$. (3 p.)

1. Vektorin $\bar{u} = 5\bar{i} + 12\bar{j} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ pituus on $|\bar{u}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

2. Määritetään ensin vektorin \bar{u} yksikkövektori \bar{u}^0 jakamalla vektori pituudellaan.

$$\bar{u}^0 = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{1}{13} (5\bar{i} + 12\bar{j}) = \frac{5}{13}\bar{i} + \frac{12}{13}\bar{j}$$

Vektorin \bar{u} kanssa vastakkaissuuntainen 5 yksikön mittainen vektori on $-5\bar{u}^0$.

$$-5\bar{u}^0 = -5 \left(\frac{5}{13}\bar{i} + \frac{12}{13}\bar{j} \right) = -\frac{25}{13}\bar{i} - \frac{60}{13}\bar{j}$$

Vastaus: $-\frac{25}{13}\bar{i} - \frac{60}{13}\bar{j}$

3. Suora L kulkee pisteiden $A = (4, 4)$ ja $B = (-1, -8)$ kautta. Ovatko suora L ja vektori \bar{u} yhdensuuntaisia (3 p.)

3. Muodostetaan suoran suuntainen (suunta)vektori \overline{AB} ja osoitetaan, että se on yhdensuuntainen vektorin \bar{u} kanssa.

$$\overline{AB} = (-1 - 4)\bar{i} + (-8 - 4)\bar{j} = -5\bar{j} - 12\bar{j} = -(5\bar{j} + 12\bar{j}) = -\bar{u}$$

Kahden pisteen
välinen vektori:
loppupiste – alkupiste

Vektori \overline{AB} on siis vektorin \bar{u} vastavektori.

Vastaus: Suora L on vektori \bar{u} ovat yhdensuuntaisia.

Yhdensuuntaisuusehdon mukainen (yleinen) ratkaisutapa:

Vektorit \overline{AB} ja \bar{u} ovat yhdensuuntaisia, jos on olemassa sellainen reaaliluku t , että $\overline{AB} = t\bar{u}$.

Ratkaistaan t tästä ehdosta:

$$-5\bar{i} - 12\bar{j} = t(5\bar{i} + 12\bar{j}) \Leftrightarrow -5\bar{i} - 12\bar{j} = 5t\bar{i} + 12t\bar{j} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = 5t \\ -12 = 12t \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$$

Yhdensuuntaisuus voitaisiin myös päätellä vektorin $\bar{u} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$ "kulmakertoimesta" $\frac{12}{5}$, joka on sama kuin suoran L kulmakerroin $k = \frac{4 - (-8)}{4 - (-1)} = \frac{12}{5}$.

4. Määritä suoran L yhtälö muodossa $y = kx + b$. (3 p.)

4. Käytetään kaavaa $y - y_0 = k(x - x_0)$, missä suoran kulmakerroin on $k = \frac{12}{5}$. Valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (4, 4)$.

$$y - 4 = \frac{12}{5}(x - 4) \Leftrightarrow y - 4 = \frac{12}{5}x - \frac{48}{5} \Leftrightarrow y = \frac{12}{5}x + \frac{20}{5} - \frac{48}{5} = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}.$$

Vastaus: Suoran L yhtälö on $y = \frac{12}{5}x - \frac{28}{5}$.