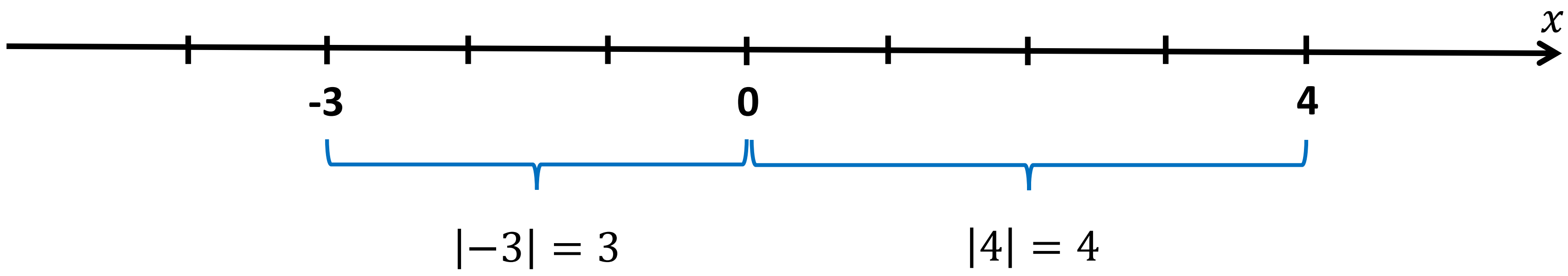
Itseisarvo

- Reaaliluvun a itseisarvo $|a|$ tarkoittaa luvun etäisyyttä nollasta (origosta) lukusuoralla.



- Koska etäisyys ei voi olla negatiivinen, itseisarvo tekee negatiivisesta luvusta positiivisen ja pitää positiivisen ennallaan:

$$|a| = \begin{cases} a & ,\text{kun } a \geq 0 \\ -a & ,\text{kun } a < 0 \end{cases}$$

- Kahden reaaliluvun itseisarvot ovat yhtä suuria, jos ja vain jos luvut ovat yhtä suuria tai toistensa vastalukuja:

$$|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ tai } a = -b$$

Itseisarvoyhtälö

- Edellisen perusteella itseisarvoyhtälö voidaan purkaa kahdeksi tavalliseksi yhtälöksi:

$$|f(x)| = |g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ tai } f(x) = -g(x).$$

Esimerkki 1: Ratkaise yhtälö $|3x-1| = |2x-4|$.

$$|3x-1| = |2x-4| \quad \Leftrightarrow$$

$$3x - 1 = 2x - 4 \quad \text{tai} \quad 3x - 1 = -(2x - 4)$$

$$x = -3 \qquad\qquad 3x - 1 = -2x + 4$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

Älä unohda sulkeita lausekkeen ympäriltä, kun vaihdat etumerkkiä!

<u>Vastaus: $x = -3$ tai $x = 1$</u>

Tarkista aina yhtälöiden ratkaisut jollakin tavalla! SpeedCrunch-laskimessa itseisarvofunktio on ”abs” (absolute value).

f(x)=abs(3x-1)

g(x)=abs(2x-4)

f(-3)
= 10

g(-3)
= 10

f(1)
= 2

g(1)
= 2

Ratkaisut ovat oikein, koska näillä x:n arvoilla yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria.

Esimerkki 2: Ratkaise yhtälö $|x-3| = |x+5|$.

$$|x-3| = |x+5| \quad \Leftrightarrow$$

$$x-3 = x+5 \quad \text{tai} \quad x-3 = -(x+5)$$

$$-3 = 5 \quad \text{tai} \quad x-3 = -x-5$$

Epätosi

$$2x = -5+3$$

$$2x = -2$$

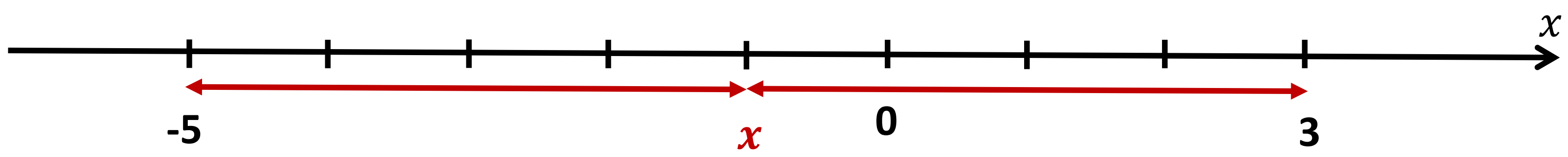
$$x = -1$$

<u>Vastaus: $x = -1$</u>

Huom! Lauseke $|x-3|$ voidaan tulkita lukujen x ja 3 etäisyydeksi lukusuoralla (ks. s. 12).

Vastaavasti $|x+5| = |x-(-5)|$ on lukujen x ja -5 etäisyys.

Siis x on se luku, joka on yhtä kaukana luvuista 3 ja -5 eli lukusuoralla näiden lukujen puolivälissä. Tämä kohta saadaan keskiarvona: $(3-5):2 = -1$.



Itseisarvon ominaisuuksia

- $|a|^2 = a^2$
  - Neliöön korottamalla voidaan siis muuttaa itseisarvoyhtälö tavalliseksi yhtälöksi. Edellisen esimerkin yhtälö $|x-3| = |x+5|$ voitaisiin kirjoittaa myös muotoon $(x-3)^2 = (x-5)^2$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$
  - Esim. $x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$.
- $|ab| = |a||b|$
  - Esim. $|-7x| = |-7||x| = 7|x|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- Lauseiden todistukset s. 13 ja harjoitustehtävä 123.