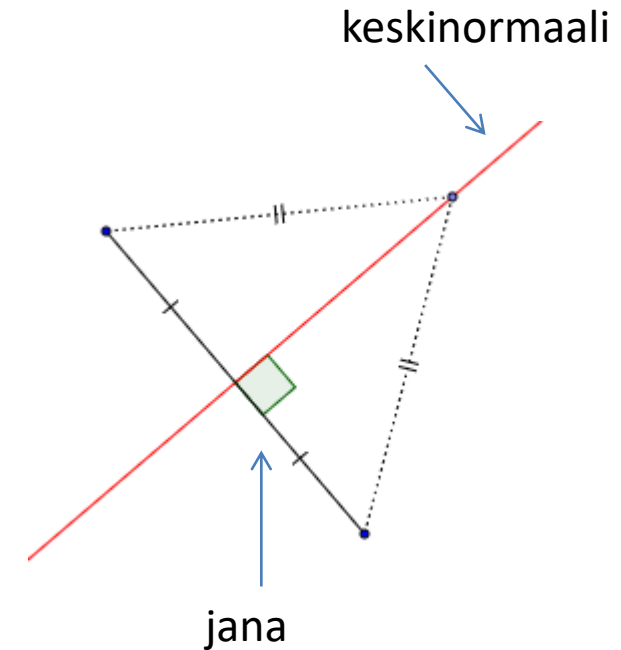


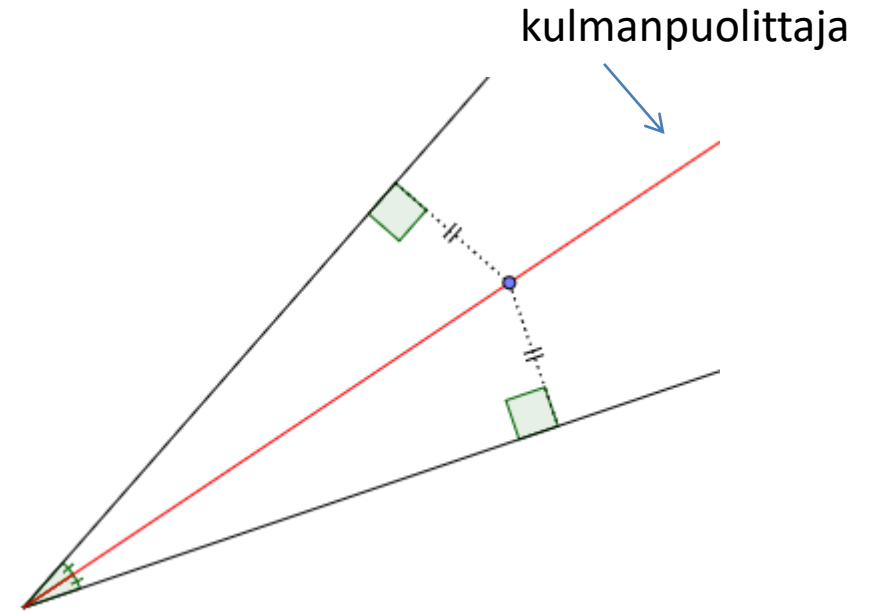
# Keskinormaali

- Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta kohtisuorasti janaan nähden.
- Piste on janan keskinormaalilla täsmälleen silloin, kun se on yhtä kaukana janan päätepisteistä.



# Kulmanpuolittaja

- *Kulmanpuolittaja* on kulman kärkipisteestä lähtevä puolisuora, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan.
- Piste on (alle  $180^\circ$ :n) kulman kulmanpuolittajalla täsmälleen silloin, kun se on kulman sisäpuolella ja yhtä kaukana kulman kyljistä.



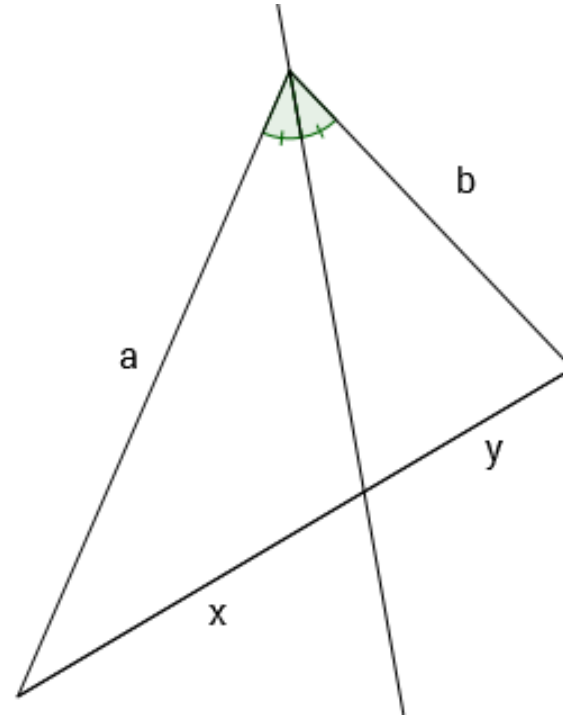
GeoGebrassa kulmanpuolittaja on suora (puolisuoran sijaan). Kulmanpuolittaja kannattaa määrittää kolmen kulman pisteen avulla (oikean kyljen piste, kärkipiste ja vasemman kyljen piste).

# Kulmanpuolittajalause

- Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

- Todistus (sinilauseen avulla) oppikirjassa sivulla 130.



**t. 349, s. 134**

Jos alemman osan pituus on  $x$ , niin ylemmän osan pituus on  $14 - x$ .

Kulmanpuolittajalauseella saadaan verranto

$$\frac{x}{14 - x} = \frac{12}{9} \quad \left| \times \right.$$

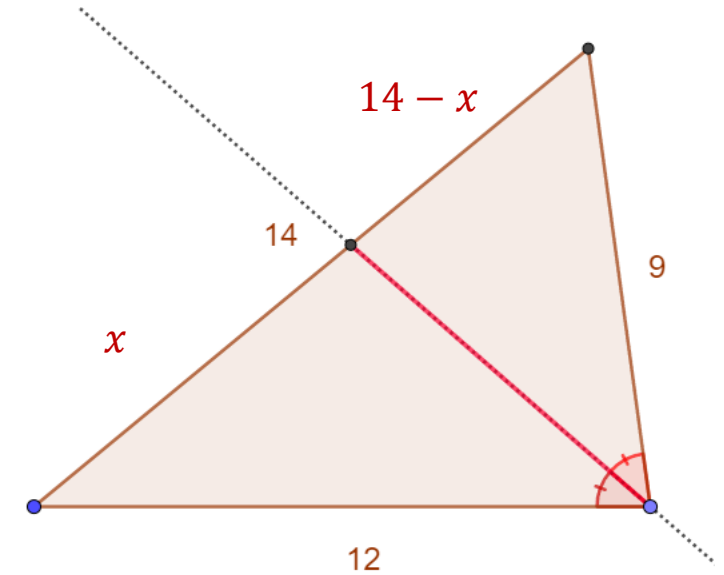
$$9x = 12(14 - x)$$

$$9x = 168 - 12x$$

$$21x = 168$$

$$x = 8$$

Osien pituudet ovat 8 ja  $14 - 8 = 6$ .



# Mediaani

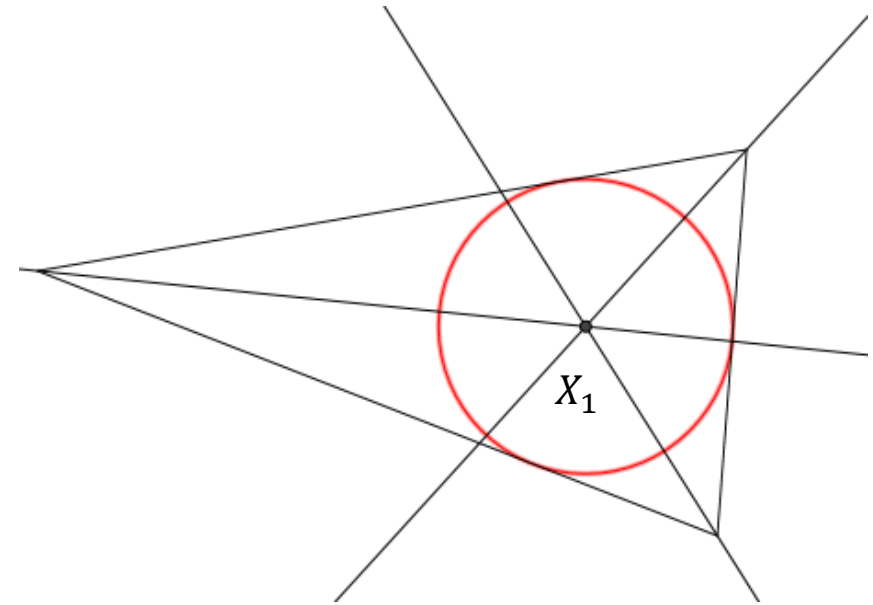
- *Mediaani* eli *keskijana* yhdistää kolmion kärjen vastakkaisen sivun keskipisteeseen.



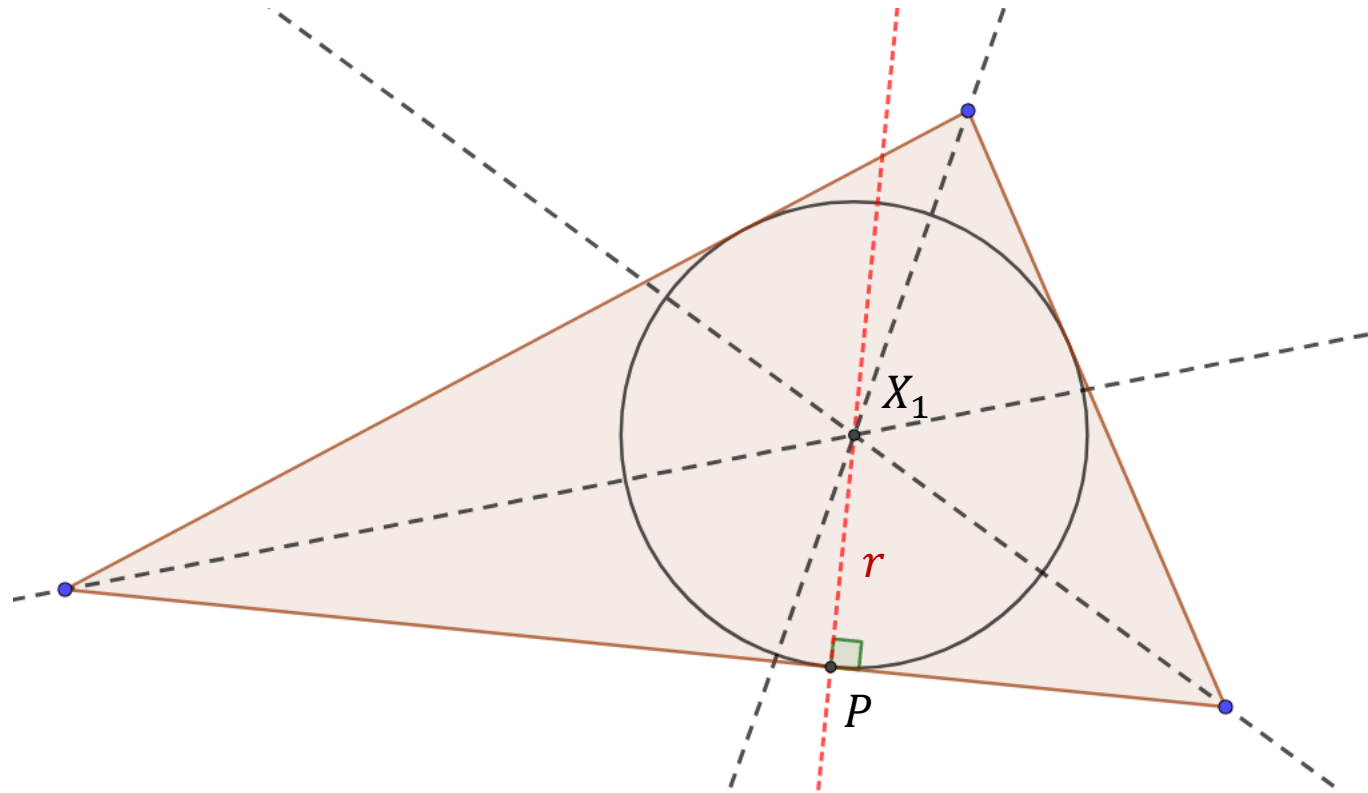
Mediaani saadaan GeoGebralla määrittämällä ensin vastakkaisen sivun keskipiste "keskipiste" –toiminnolla ja piirtämällä sitten tästä pisteestä jana kolmion vastakkaiseen kärkeen.

# Kolmion merkilliset pisteet

- Kolmioissa on useita ns. *merkillisiä pisteitä*, joissa kolme tietyllä tavalla muodostettua janaa tai suoraa leikkaa toisensa kolmion muodosta riippumatta.
- Ensimmäinen näistä pisteistä on *kulmanpuolittajien leikkauspiste*  $X_1$ :
- Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, ja tämä piste on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

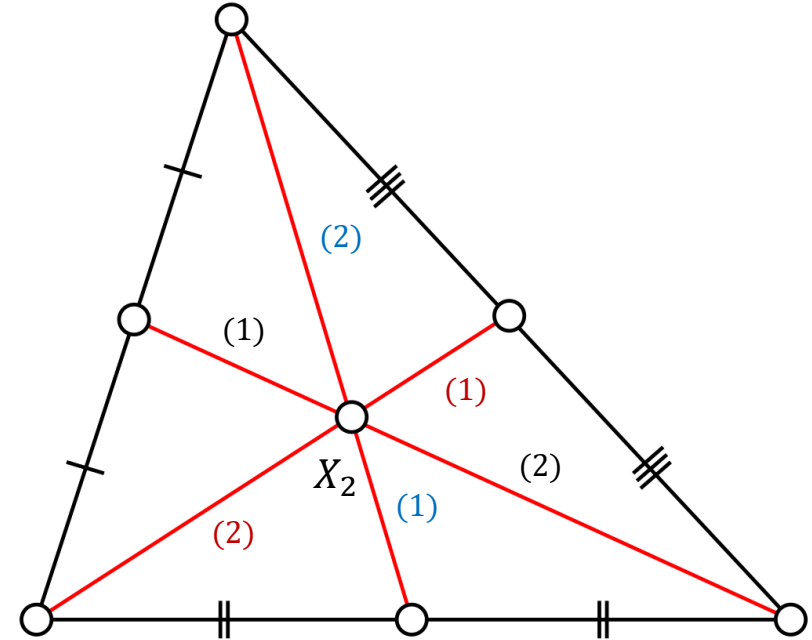


- Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde  $r$  saadaan graafisesti normaalisuoran avulla.
- Piirretään kulmanpuolittajien leikkauspisteestä  $X_1$  normaali jollekin kolmion sivuista.
- Määritetään normaalin ja sivun leikkauspiste  $P$ .
- Ympyrän säde on pisteiden  $X_1$  ja  $P$  välinen jana.



# Kolmion merkilliset pisteet

- Toinen merkillinen piste on *mediaanien leikkauspiste*  $X_2$ .
- Kolmion mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, jota kutsutaan kolmion *painopisteeksi*.
- Mediaaninen leikkauspiste jakaa jokaisen medianin suhteessa 2 : 1 kolmion kärjestä lukien.
  - Tulos voidaan todistaa helpoiten vektorilaskennalla (MAA4)



GeoGebran "keskipiste" –toiminnolla muodostettu kolmion "keskipiste" on mediaanien leikkauspiste.

# Kolmion merkilliset pisteet

- Kolmas merkillinen piste on *keskinormaalien leikkauspiste*  $X_3$ .
- Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, ja tämä piste on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.

