

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

- Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$ ratkaisut (eli juuret) saadaan kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (\text{Todistus oppikirjassa, s. 75})$$

- Jos juuren sisässä oleva lauseke eli *juurrettava* $b^2 - 4ac$ on negatiivinen, niin juurta ei voi laskea.
- Tällöin yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Esimerkki 1: $1x^2 - 4x + 3 = 0$

a b c

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$a = 1$
 $b = -4$
 $c = 3$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

Muista että neliö ei voi olla koskaan negatiivinen!
(Tässä voisi siis jättää miinuksen ja sulut pois.)

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \text{ tai } x = 1$$

Muista aina tarkistaa!

Tarkistus sijoittamalla:

$$1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

- Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisuilla x_1 ja x_2 on seuraavat ominaisuudet:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{ja} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Erityisesti, jos $a = 1$, niin ratkaisujen tulo on vakiotermin c ja ratkaisujen summa kertoimen b vastaluku. Tämä on usein hyvä tarkistuskeino.
 - Tarkistetaan edellisen esimerkin yhtälön $x^2 - 4x + 3 = 0$ ratkaisut:
 - Ratkaisuksi saatiin $x_1 = 1$ tai $x_2 = 3$.
 - Ratkaisujen tulo: $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 1 = 3 = c =$ vakiotermin
 - Ratkaisujen summa: $x_1 + x_2 = 3 + 1 = 4 = -b = x$:n kertoimen vastaluku.

Esimerkki 2: $3x^2 + 7x - 6 = 0$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$a = 3$$

$$b = 7$$

$$c = -6$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6}$$

$$x = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7 - 11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tarkistus (ratkaisujen tulon ja summan perusteella):

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot (-3) = -2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} + (-3) = \frac{2}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$$

Esimerkki 3:

$$18x^2 - 24x + 6 = 0 \quad | :6$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Jos kertoimilla a , b ja c on yhteinen tekijä, niin sillä kannattaa jakaa yhtälö puolittain.

Käytetään 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$a = 3$$

$$b = -4$$

$$c = 1$$

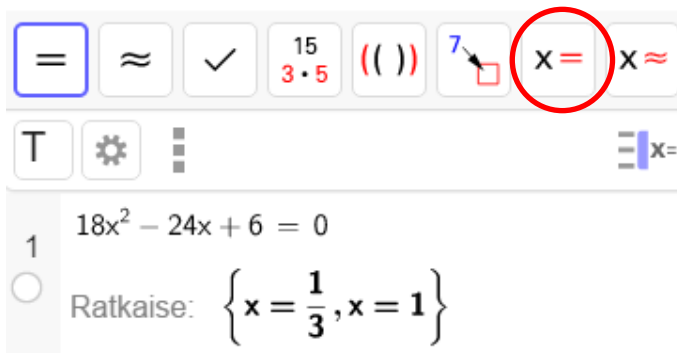
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

Miinus voidaan tässä jättää pois (varmuuden vuoksi, ettei etumerkiksi lipsahda miinus).

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow x = \frac{6}{6} \text{ tai } x = \frac{2}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

GeoGebran CAS-tilassa:



The screenshot shows the GeoGebra CAS interface. The top toolbar contains various symbols, with the 'x=' symbol circled in red. Below the toolbar, the input field contains the equation $18x^2 - 24x + 6 = 0$. The output field shows the solution set: $\text{Ratkaise: } \left\{ x = \frac{1}{3}, x = 1 \right\}$.

$$\text{Tarkistus: } x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = -\frac{b}{a}$$

(Ratkaisu $x = 1$ on toki helppo tarkistaa myös sijoittamalla.)

Esimerkki 4:

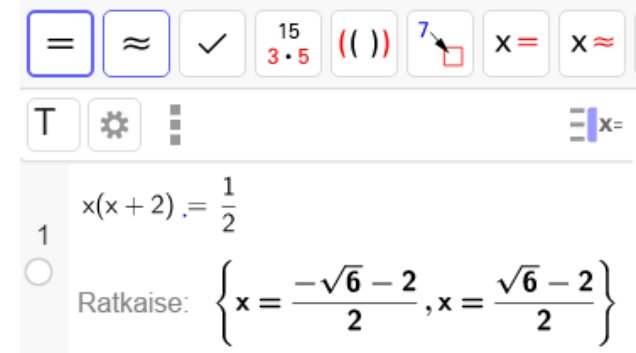
$$x(x + 2) = \frac{1}{2} \quad | \cdot 2$$

Murtoluvut kannattaa kertoa pois.

$$2x(x + 2) = 1$$

$$2x^2 + 4x = 1$$

$$2x^2 + 4x - 1 = 0$$



The screenshot shows a digital math solver interface. At the top, there are buttons for equals, approximate, check, a fraction button (15 over 3*5), parentheses, a cursor, and variables x= and x≈. Below these are buttons for text (T), settings (gear), and a list icon. The main display area shows the equation $x(x+2) = \frac{1}{2}$ and the solutions: $\text{Ratkaise: } \left\{ x = \frac{-\sqrt{6}-2}{2}, x = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \right\}$.

Käytetään 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$c = -1$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 6}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2}$$

Tarkistus ratkaisujen summan ja tulon avulla (nyt sijoittaminen alkuperäiseen yhtälöön olisi työlästä):

$$\frac{-2 + \sqrt{6}}{2} + \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} = \frac{-2 - 2}{2} = -\frac{4}{2} = -\frac{b}{a},$$

$$\frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \cdot \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} = \frac{4 - 6}{4} = -\frac{1}{2} = \frac{c}{a}$$