Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

- Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$ ratkaisut (eli juuret) saadaan kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Todistus oppikirjassa, s. 75)

- Jos juuren sisässä oleva lauseke eli *juurrettava* $b^2 - 4ac$ on negatiivinen, niin juurta ei voi laskea.
- Tällöin yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Esimerkki 1: $\underset{a}{1}x^2 \underbrace{-4}_{b}x + \underset{c}{3} = 0$

$$x = \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$a = 1$
$b = -4$
$c = 3$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

Muista että neliö ei voi olla koskaan negatiivinen!
(Tässä voisi siis jättää miinuksen ja sulut pois.)

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \text{ tai } x = 1$$

Muista aina tarkistaa!

Tarkistus sijoittamalla:

$$1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

- Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisuilla x_1 ja x_2 on seuraavat ominaisuudet:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{ja} \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- Erityisesti, jos $a = 1$, niin ratkaisujen tulo on vakiotermi c ja ratkaisujen summa kertoimen b vastaluku. Tämä on usein hyvä tarkistuskeino.
  - Tarkistetaan edellisen esimerkin yhtälön $x^2 - 4x + 3 = 0$ ratkaisut:
  - Ratkaisuksi saatiin $x_1 = 1$ tai $x_2 = 3$.
  - Ratkaisujen tulo: $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot 1 = 3 = c =$ vakiotermi
  - Ratkaisujen summa: $x_1 + x_2 = 3 + 1 = 4 = -b = x$:n kertoimen vastaluku.

Esimerkki 2: $3x^2 + 7x - 6 = 0$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$a = 3$
$b = 7$
$c = -6$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-7 \pm 11}{6}$$

$x = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ tai $x = \frac{-7 - 11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$

Tarkistus (ratkaisujen tulon ja summan perusteella):

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot (-3) = -2 \qquad \frac{c}{a} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} + (-3) = \frac{2}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{7}{3} \qquad -\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$$

Esimerkki 3:

$$18x^2 - 24x + 6 = 0 \quad \Big| :6$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Jos kertoimilla a, b ja c on yhteinen tekijä, niin sillä kannattaa jakaa yhtälö puolittain.

Käytetään 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$a = 3$
$b = -4$
$c = 1$

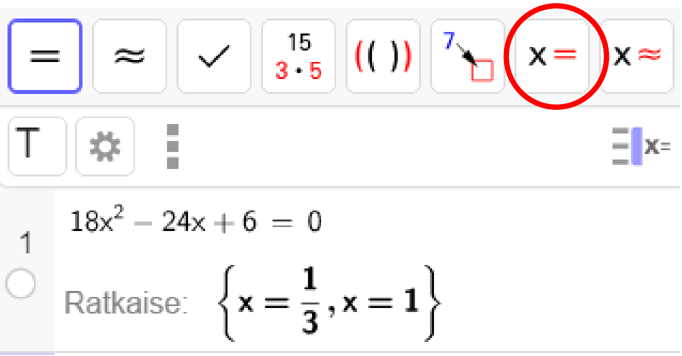
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

Miinus voidaan tässä jättää pois (varmuuden vuoksi, ettei etumerkiksi lipsahda miinus).

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6}{6} \text{ tai } x = \frac{2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

GeoGebran CAS-tilassa:



Tarkistus: $\quad x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$

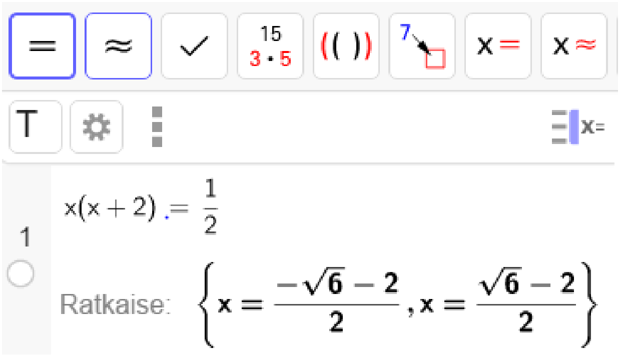
$$x_1 + x_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = -\frac{b}{a}$$

(Ratkaisu $x = 1$ on toki helppo tarkistaa myös sijoittamalla.)

Esimerkki 4:

$$x(x+2)=\frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

Murtoluvut kannattaa kertoa pois.



$$2x(x+2)=1$$

$$2x^2+4x=1$$

$$2x^2+4x-1=0$$

Käytetään 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$a=2$

$b=4$

$c=-1$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{4\cdot 6}}{4}=\frac{-4\pm 2\sqrt{6}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-2+\sqrt{6}}{2} \quad \text{tai} \quad x=\frac{-2-\sqrt{6}}{2}$$

Tarkistus ratkaisujen summan ja tulon avulla (nyt sijoittaminen alkuperäiseen yhtälöön olisi työlästä):

$$\frac{-2+\sqrt{6}}{2}+\frac{-2-\sqrt{6}}{2}=\frac{-2-2}{2}=-\frac{4}{2}=-\frac{b}{a}, \qquad \frac{-2+\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{-2-\sqrt{6}}{2}=\frac{4-6}{4}=-\frac{1}{2}=\frac{c}{a}$$