

Rationaalifunktion nollakohdat ja rationaaliyhtälö

- Rationaalifunktion nollakohdat ovat osoittajan nollakohtia, jos funktio on määritelty näissä kohdissa.
- Toisin sanoen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff P(x) = 0 \text{ ja } Q(x) \neq 0$$

- Rationaaliyhtälöissä (eli yhtälöissä joissa on rationaalilausekkeita) ei kuitenkaan ole pakko sieventää lauseketta rationaalifunktion muotoon. Yhtälöä saa kertoa puolittain rationaalilausekkeiden nimittäjillä, koska nimittäjien täytyy olla eri suuria kuin nolla määrittelyehdon mukaisesti.
 - ”Ristiin kertominen” on usein kätevä tapa.

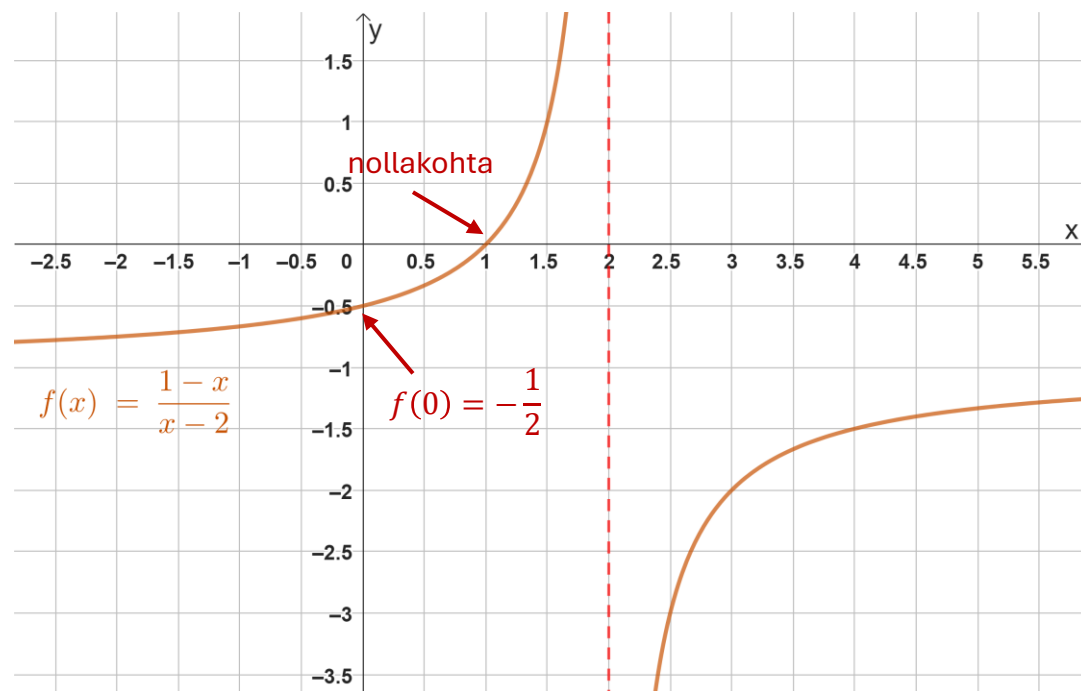
t. 642, s. 181

a) $f(x) = \frac{1-x}{x-2}, \quad x \neq 2$

Funktion arvo kohdassa nolla: $f(0) = \frac{1-0}{0-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Funktion nollakohta: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0, \quad x \neq 2 \Leftrightarrow x = 1$

b)



Funktion arvo kohdassa nolla on aina funktion kuvaajan ja y –akselin leikkauspisteen y –koordinaatti.

Funktion nollakohta on aina funktion kuvaajan ja x –akselin leikkauspisteen x –koordinaatti.

t. 651, s. 182

a) $\frac{1}{x} - \frac{x+1}{2x} = 0 \quad | \cdot 2x$

Määrittelyehto on $x \neq 0$. Yhtälöä saa kertoa puolittain $2x$:llä, koska x ei voi olla nolla. Samalla saadaan poistettua nimittäjä x .

$$\cancel{2x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - \cancel{2x} \cdot \frac{x+1}{\cancel{2x}} = 0$$

$$2 - (x + 1) = 0$$

$$2 - x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Muista sulut! Etumerkki miinus vaikuttaa koko osoittajaan!

Muista myös tarkistus! Sijoita ratkaisu alkuperäiseen lausekkeeseen (laskinohjelmalla tai ilman).

$$\frac{1}{1} - \frac{1+1}{2 \cdot 1} = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0$$

Huom!

Yhtälön voisi ratkaista myös ristiin kertomalla (vrt. b-kohta tai tehtävän 652 opiskelijan 2 laskutapa.)

b) $\frac{3}{x} = \frac{2}{x+1} \quad \Bigg| \quad \times$

Kerrotaan ristiin (eli kerrotaan puolittain molemmilla nimittäjillä).
Tämä on sallittua määrittelyehdolla $x \neq 0$ ja $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

$$3(x+1) = 2x$$

$$3x + 3 = 2x$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Tarkistus: $\frac{3}{-3} = -1, \quad \frac{2}{-3+1} = \frac{2}{-2} = -1$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 \quad \Bigg| \quad \cdot x^2 \neq 0$

Nimittäjällä x^2 kertominen poistaa myös nimittäjän x (koska x on tekijänä potenssissa x^2).

$$\cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \cancel{x^2} \cdot \frac{2}{\cancel{x^2}} = x^2 \cdot 1$$

Muista kertoa jokainen termi ja molemmat puolet!

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -2$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon $x \neq 0$.

Vastaus: $x = 2$ tai $x = -1$.

Tarkistus esim. SpeedCrunchilla:

$$f(x) = 1/x + 2/x^2$$

$$f(2) = 1$$

$$f(-1) = 1$$