

# Rationaalifunktion nollakohdat ja rationaaliyhtälö

- Rationaalifunktion nollakohdat ovat osoittajan nollakohtia, jos funktio on määritelty näissä kohdissa.
- Toisin sanoen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff P(x) = 0 \text{ ja } Q(x) \neq 0.$$

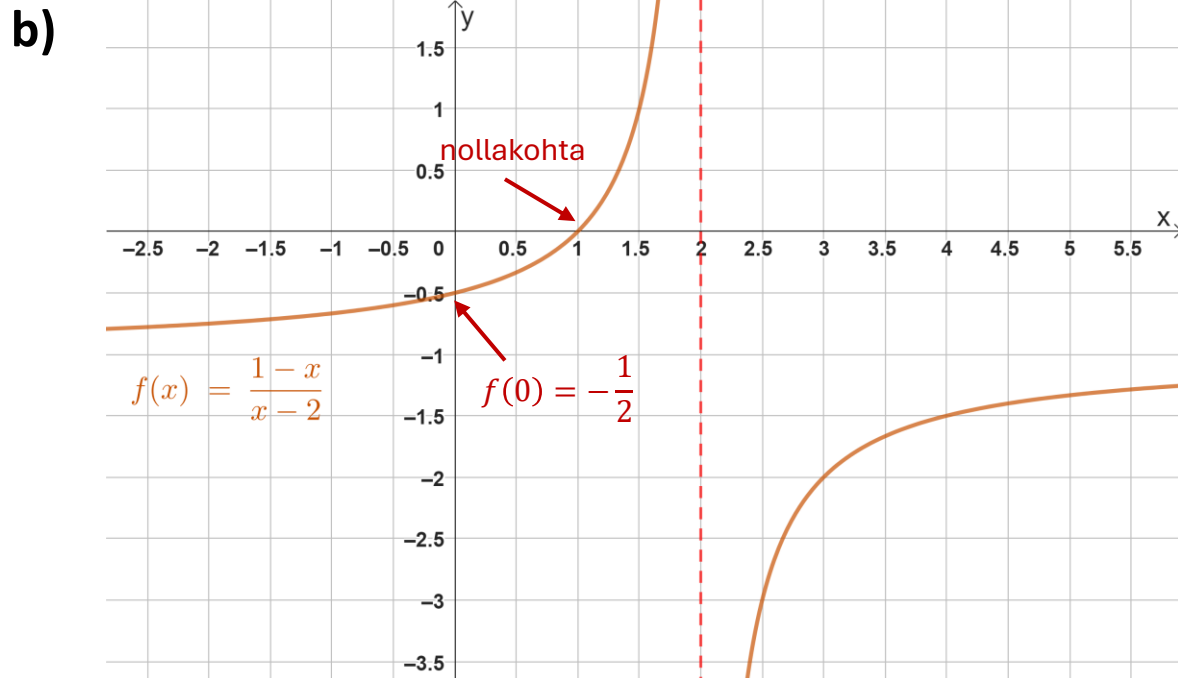
- Rationaaliyhtälöissä (eli yhtälöissä joissa on rationaalilausekkeita) ei kuitenkaan ole pakko sieventää lauseketta rationaalifunktion muotoon. Yhtälöä saa kertoa puolittain rationaalilausekkeiden nimittäjillä, koska nimittäjien täytyy olla eri suuria kuin nolla määrittelyehdon mukaisesti.
- ”Ristiin kertominen” on usein kätevä tapa.

t. 642, s. 181

a)  $f(x) = \frac{1-x}{x-2}, \quad x \neq 2$

Funktion arvo kohdassa nolla:  $f(0) = \frac{1-0}{0-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

Funktion nollakohta:  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0, \quad x \neq 2 \Leftrightarrow x = 1$



Funktion arvo kohdassa nolla on aina funktion kuvaajan ja  $y$  – akselin leikkauspisteen  $y$  – koordinaatti.

Funktion nollakohta on aina funktion kuvaajan ja  $x$  – akselin leikkauspisteen  $x$  – koordinaatti.

t. 651, s. 182

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x} - \frac{x+1}{2x} = 0 \quad \Big| \cdot 2x$$

Määrittelyehto on  $x \neq 0$ . Yhtälöä saa kertoa puolittain  $2x$ :llä, koska  $x$  ei ole nolla. Samalla saadaan poistettua nimittäjä  $x$ .

$$\cancel{2x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - \cancel{2x} \cdot \frac{x+1}{\cancel{2x}} = 0$$

$$2 - (x + 1) = 0$$

$$2 - x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Muista sulut! Etumerkki miinus vaikuttaa koko osoittajaan!

Muista myös tarkistus! Sijoita ratkaisu alkuperäiseen lausekkeeseen (laskinohjelmalla tai ilman).

$$\frac{1}{1} - \frac{1+1}{2 \cdot 1} = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0$$

Yhtälön voisi ratkaista myös ristiin kertomalla (vrt. b-kohta tai tehtävän 652 opiskelijan 2 laskutapa).

$$\text{b)} \quad \frac{3}{x} = \frac{2}{x+1} \quad \Bigg| \quad \times$$

$$3(x+1) = 2x$$

$$3x + 3 = 2x$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Kerrotaan ristiin (eli kerrotaan puolittain molemmilla nimittäjillä).  
Tämä on sallittua määrittelyehdolla  $x \neq 0$  ja  $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ .

$$\text{Tarkistus:} \quad \frac{3}{-3} = -1, \quad \frac{2}{-3+1} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\text{c)} \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 \quad \Bigg| \quad \cdot x^2 \neq 0$$

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} + x^2 \cdot \frac{2}{x^2} = x^2 \cdot 1$$

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Nimittäjällä  $x^2$  kertominen poistaa myös nimittäjän  $x$  (koska  $x$  on tekijänä potenssissa  $x^2$ ).

Muista kertoa jokainen termi ja molemmat puolet!

Ratkaistaan yhtälö toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -2$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

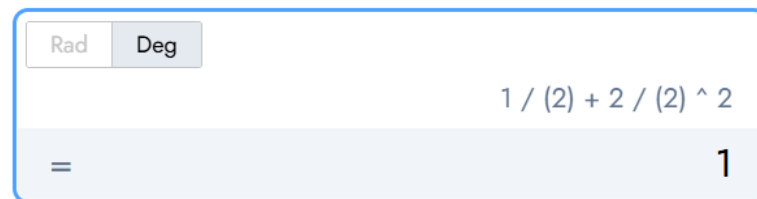
$$x = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat määrittelyehdon  $x \neq 0$ .

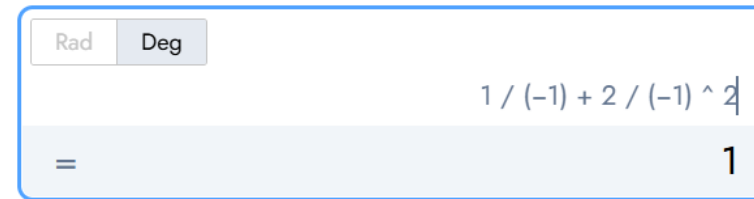
Vastaus:  $x = 2$  tai  $x = -1$ .

Tarkista sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön (esim. Abicus-laskimella):

Lausekkeen  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$  arvon pitää olla 1, kun  $x = 2$  tai  $x = -1$ .



Rad Deg  
 $1 / (2) + 2 / (2) ^ 2$   
= 1



Rad Deg  
 $1 / (-1) + 2 / (-1) ^ 2$   
= 1