

Toisen asteen polynomin tekijät

- Jos toisen asteen yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on kaksi eri suurta juurta (eli ratkaisua) x_1 ja x_2 , niin polynomi $ax^2 + bx + c$ voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ on vain yksi juuri x_1 (eli ns. *kaksoisjuuri*), niin

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

- Jos yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole ratkaisuja, niin polynomi $ax^2 + bx + c$ on *jaoton* (eli sillä ei ole ensimmäisen asteen tekijöitä).

Esimerkki:

Jaa polynomit a) $2x^2 - 8x - 10$ ja b) $x^2 - 10x + 25$ tekijöihin.

a) Ratkaistaan ensin vastaava yhtälö $2x^2 - 8x - 10 = 0$.

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 8x - 10 = 0 \quad | :2 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{array}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

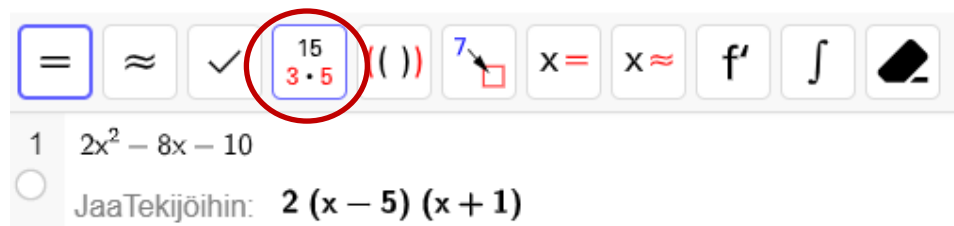
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Tekijöihin jako saadaan kaavalla $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Nyt $a = 2$, $x_1 = 5$ ja $x_2 = -1$. (Ei ole väliä kumpi ratkaisusta on x_1 ja kumpi x_2 .)

Siis $2x^2 - 8x - 10 = 2(x - 5)(x - (-1)) = 2(x - 5)(x + 1)$.

GeoGebran CAS-tilassa:



Tarkistus
SpeedCrunchilla:

SpeedCrunch

Istunto Muokkaa Näytä Asetukset Ohje

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 10$$

$$f(5) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

b) Ratkaistaan ensin vastaava yhtälö $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = 5$$

Kyseessä on kaksoisjuuri ja tekijöihin jako saadaan kaavalla $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Nyt $a = 1$ ja $x_1 = 5$.

$$\text{Siis } x^2 - 10x + 25 = 1 \cdot (x - 5)^2 = (x - 5)^2$$

Tuloksen voi tarkistaa muistikaavalla $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Tekijöihin jaon voisi keksiä suoraan käyttämällä tätä muistikaavaa toiseen suuntaan:

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = (x - 5)^2$$

Nollakohtien ja tekijöiden yhteys

- Toisen asteen polynomin nollakohtien ja tekijöiden välinen yhteys yleistyy myös korkeampiasteisille polynomeille.
- Jos polynomilla on jokin nollakohta x_1 , niin polynomilla on tekijä $x - x_1$.
- Erityisesti jos n :nnen asteen polynomilla

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

on nollakohdat $x_1, x_2, \dots, x_n$, niin se voidaan esittää muodossa

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

- Sama tekijä voi esiintyä tässä useampaan kertaan. Näitä tekijöitä vastaavia nollakohtia kutsutaan monikertaisiksi nollakohdiksi.

t. 506, s. 137

a) $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 3x + 18$

Kolmannen asteen polynomilla voi olla korkeintaan kolme nollakohtaa.

Nollakohtien $x = -1$, $x = 2$ ja $x = 3$ lisäksi ei siis voi olla muita nollakohtia.

b) Nollakohtien ja tekijöiden välisen yhteyden perusteella:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 12x^2 + 3x + 18 = 3(x - (-1))(x - 2)(x - 3) \\ &= 3(x + 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$